Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
L1 S1

Mathématiques 1

V. 2

Table des matières

Partie I. Nombres réels et nombres complexes

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Quelques idées sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

1.1.1 Définitions

Definition 1.1. *Un* ensemble *E est une collection d'objets appelés* éléments*. On note $x \in E$ si l'objet x est un élément de E.*

Voici la liste des ensembles usuels.

- L'ensemble des entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$
qui contient en particulier les entiers pairs et impairs ainsi que les *nombres premiers*, c'est à dire les entiers naturels seulement divisibles par 1 et par eux-mêmes. On a que la somme de deux entiers naturels est un entier naturel de même pour le produit.
- L'ensemble des entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$
On a que la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif de même pour le produit. Tout entier naturel est un entier relatif, on note :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$
où $\subset$ signifie inclus.
- L'ensemble des rationnels :
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q > 0 \right\}.$$

  ✎ **Notation.** $\{x|$ une propriété de $x\}$ est l'ensemble des éléments x qui vérifie la propriété décrite.

  $\mathbb{Q}$ vérifie un certain nombre de propriétés algébriques, qui font qu'on appelle $\mathbb{Q}$ un *corps* :
  - $0 \in \mathbb{Q}$;
  - Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $-x \in \mathbb{Q}$
  - Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $x + y \in \mathbb{Q}$;
  - Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $xy \in \mathbb{Q}$;
  - Si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \neq 0$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$.

  Un exemple sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des *nombres décimaux* :
$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^k},\ p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$
- L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$. Un réel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme
$$\pm a_1 a_2 \ldots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \ldots$$
où $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont des entiers naturels plus petit strictement que 10. Une telle écriture est appelée *développement décimal.* Tout rationnel est un réel. Il existe des éléments de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$, on les appelle les *irrationnels.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de l'addition et de la multiplication. On rappelle que
- pour tout réel c, $a = b$ est équivalent à $a + c = b + c$,
- pour tout réel c non nul, $a = b$ est équivalent à $ac = bc$.

$\diamondsuit$ **Exemple.** On veut montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. On va supposer le contraire, c'est-à-dire qu'on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Ainsi il existe p dans $\mathbb{N}$ et q dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, c'est-à-dire sans diviseur commun. En élevant au carrée, on a $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair ce qui implique que p est pair. Il existe alors $r \in \mathbb{N}$ tel $p = 2r$. Ainsi, on a $4r^2 = 2q^2$, c'est-à-dire $2r = q^2$. Donc q^2 est pair. q est alors pair. Donc 2 divise p et q ce qui est contraire à l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

On introduit les notations

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+^* &= \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \\
\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \\
\mathbb{R}_-^* &= \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}, \\
\mathbb{R}_- &= \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}.
\end{aligned}$$

On a des notations similaires pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

1.1.2 Formule du binôme et identités remarquables

On rappelle la *formule du binôme* (de Newton) : pour tout a, b réels on a

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}$$

☞ **Remarque.** Ces forumules sont aussi vraies pour des nombres complexes (Chapitre 4).

☞ **Remarque.** Les notations supposées connues sont rappelées dans l'annexe B page 89.

Exercice.
1. Écrire les coefficients $\binom{n}{k}$ pour n et k tels que de $0 \leq k \leq n \leq 5$ (triangle de Pascal).
2. Développer $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)^3, (a-b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5$.

1.2 Ordre dans $\mathbb{R}$ et topologie de $\mathbb{R}$

1.2.1 Ordre dans $\mathbb{R}$

Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est qu'il possède une relation d'ordre, c'est à dire que l'on peut comparer deux réels : $x \leq y$ signifie que x est égal à y ou que x est plus petit que y. On dit que $\mathbb{R}$ est un ensemble *ordonné*, c'est-à-dire que $\leq$ est une relation d'ordre, ce qui signifie que $\leq$ est
- réflexif : $x \leq x$,
- antisymétrique : si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
- transitif : si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$;

de plus l'ordre est *total* : tous les éléments de $\mathbb{R}$ peuvent être comparés entre eux (on dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné).

Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a les propriétés suivantes :
- si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$,
- si $x \leq y$ et $z \geq 0$ alors $zx \leq zy$,
- si $x \leq y$ et $z \leq 0$ alors $zx \geq zy$,

on peut en déduire par exemple

– si $0 < x < y$ alors $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$,
– si $x < y < 0$ alors $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x} < 0$,
– si $0 < x < y$ alors $x^2 < y^2$,
– si $x < y < 0$ alors $x^2 > y^2$.

Attention ! Si $x < 0 < y$ alors $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$, mais on ne sait **pas** si $x^2 < y^2$.

1.2.2 Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit sa valeur absolue par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On rappelle les propriétés suivantes, pour x, y dans $\mathbb{R}$, n dans $\mathbb{N}$:

- $|xy| = |x||y|$,
- $|x^n| = |x|^n$,
- $x^2 \leq y^2$ est équivalent à $|x| \leq |y|$,

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

- $|x| = \alpha$ est équivalent à $x = \alpha$ ou $x = -\alpha$,
- $|x| \leq \alpha$ est équivalent à $-\alpha \leq x \leq \alpha$,
- Si $\alpha \geq 0$, $|x| \geq \alpha$ est équivalent à $x \leq -\alpha$ ou $x \geq \alpha$.

On rappelle aussi l'*inégalité triangulaire*, pour x et y dans $\mathbb{R}$,

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$$

qui a pour conséquence

$$\boxed{|x-y| \leq |x| + |y|}$$

et l'*inégalité triangulaire inversée*

$$\boxed{||x| - |y|| \leq |x+y|}$$

qui a pour conséquence

$$\boxed{||x| - |y|| \leq |x-y|.}$$

Exercice. Montrer

a) $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$
b) $||x| - |y|| \leq |x-y|$
c) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|$. Quand y-a-t'il égalité ?

☞ **Remarque.** Une preuve de l'inégalité triangulaire est donnée dans le cas complexe au Lemme 4.3 page 40.

1.2.3 Distance

On définit sur $\mathbb{R}$ une *distance* $d(x, y)$ entre deux réels x et y :

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Ainsi pour $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble des réels x tels que

$$|x - a| \leq \alpha$$

est le segment de centre a et de rayon α.

1.2.4 Notions d'intervalles

Soit a et b deux réels, les intervalles ouverts, fermés et semi-ouverts de $\mathbb{R}$ sont définis par

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, \quad \text{intervalle ouvert,}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, \quad \text{intervalle fermé}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad \text{intervalle semi-ouvert et semi-fermé.}$$

On a aussi

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}, \quad \text{intervalle fermé}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}, \quad \text{intervalle ouvert}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}, \quad \text{intervalle ouvert}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\} \quad \text{intervalle fermé.}$$

☞ **Remarque.** Ce qu'on appelle *topologie* de $\mathbb{R}$ est l'étude des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}$.

1.2.5 Majorants, minorants

Definition 1.2. *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un*
- majorant *de A si pour tout $a \in A$, on a $a \leq x$,*
- minorant *de A si pour tout $a \in A$, on a $a \geq x$,*
- plus grand élément *de A si x est un majorant de A et $x \in A$,*
- plus petit élément *de A si x est un minorant de A et $x \in A$.*

On dit que A est
- majoré *si A admet un majorant,*
- minoré *si A admet un minorant,*
- borné *si A est majoré et minoré.*

♢ **Exemple.** $A =]0, 1[$ admet -1, 0 comme minorants. D'autre part, 10, 4 et 1 sont des majorants. En outre A est borné.

$B =]-\infty, b]$ n'a pas de minorant mais des majorants, notamment b, et B n'est pas borné.

Exercice. Montrer que le plus petit élément d'un ensemble, si il existe, est unique.

1.2.6 Partie entière

L'ensemble $\mathbb{R}$ est *archimédien*, ou a la *propriété d'Archimède* : pour x et y des nombres réels positifs avec $x > y$, il existe un entier n tel que $nx > y$.

La *partie entière* d'un réel x est l'unique entier relatif $E(x)$ qui vérifie

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

La définition de la partie entière utilise le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien. Une définition équivalente de la partie entière sera donnée page 50.

1.2.7 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.3. *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est* dense *dans $\mathbb{R}$. Cela signifie que pour tous réels x et y avec $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$ (c'est-à-dire $r \in]x, y[$).*

Démonstration. On veut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$, ce qui est la même chose de montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $x < p/q < y$, ce qui s'écrit $qx < p < qy$. Par la propriété d'Archimède on sait qu'on peut choisir un entier q tel que $q(y - x) > 1$, c'est-à-dire $qy > 1 + qx$. Prenons $p = E(1 + qx)$. On a $qy > p$ et par définition de la partie entière, $p > 1 + qx - 1 = qx$, ce qui donne le résultat. □

☞ **Remarque.** Dans l'exercice 1.26 on montrera que les irrationels sont aussi denses dans $\mathbb{R}$.

1.3 Exercices

Exercice 1.1. Montrer que $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Exercice 1.2. Montrer les identités suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 1.3. Pour $n \geq 1$ montrer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Rappel : $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Exercice 1.4 (Triangle de Pascal)**.** Montrer la formule

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}.$$

Rappel : $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exercice 1.5. Montrer les inégalités suivantes, pour tout x, y, z réels :

a) Pour $x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$,

b) $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,

c) $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$,

d) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Exercice 1.6. Pour x et y dans $\mathbb{R}_+$ et n dans $\mathbb{N}^*$, montrer

a) $(x+y)^{1/n} \leq x^{1/n} + y^{1/n}$.

b) $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 1.7. On suppose que $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ vérifient $|x-a| < |a|$. Montrer qu'alors x est non nul et de même signe que a.

Exercice 1.8. Résoudre les inégalités suivantes :

a) $|x+1| < 0,1$

b) $|x-2| > 10$

c) $|x| < |x+1|$

d) $||x+3|-1| \leq 2$

e) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 3$

f) $\sqrt{x^2-2x+3} \leq x - 1$

g) $|2x-1| < |x-1|$

Exercice 1.9. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\dfrac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est.

Exercice 1.10. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$. Montrer que $E =]0,1]$.

Exercice 1.11. Soit a_1, a_2 dans $\mathbb{R}$ et r_1 et r_2 strictement positifs. Soit $x, y \in \mathbb{R}, |x-a_1| \leq r_1$ et $|y-a_2| \leq r_2$. Montrer que

$$|xy - a_1a_2| \leq r_1r_2 + |a_2|r_1 + |a_2|r_1.$$

Exercice 1.12. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq x < 3$ et $-1 < y \leq 1$. Donner des encadrements de $x+y$, xy, $\frac{1}{x}$, et $\frac{x}{y}$.

Exercice 1.13. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Exercice 1.14.
a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}, 2ab \leq a^2 + b^2$.
b) Montrer que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}, ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 1.15. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 1.16. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$.
b) $\frac{3x+4}{4x+2} = x$.
c) $\frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+1}{x-1}$.
d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$.

Exercice 1.17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$.
b) $\frac{2x+1}{3x+2} < 0$.
c) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$.
d) $\frac{1}{x} > x$.
e) $\frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{x}$.
f) $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 4$.
g) $|x+1| < 0.1$.
h) $|x-2| > 10$.
i) $||x+3| - 1| \leq 2$.
j) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$.
k) $\sqrt{x-1} > 2 - \sqrt{x}$.
l) $|2x-1| < |x-1|$.

Exercice 1.18. Discuter et résoudre l'équation en x de paramètre m

$$|x+3| = mx + 2.$$

Exercice 1.19.
a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$xy \leq (1/2)(x^2 + y^2).$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x}.$$

Exercice 1.20. Montrer les inégalités suivantes.
a) $\forall x \in]0, +\infty[, x + \frac{1}{x} \geq 2$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

Exercice 1.21. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 1.22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer : $\Pi_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 1.23. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}),$$

puis en déduire la valeur de $E\left(\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ (où $E(.)$ désigne la partie entière).

Exercice 1.24. Montrer que la partie de $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

est bornée. (Indication : on montrera et utilisera $|\sin x| \leq |x| \ \ \forall x \in \mathbb{R}$).

Exercice 1.25. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle vérifiant

$$(1) \ \ f(x+y) = f(x) + f(y) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$(2) \ \ f(xy) = f(x)f(y) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.
3. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}^+, f(r) = r$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$.
5. Montrer que f est croissante.
6. Montrer par l'absurde que $f(x) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ (on introduira un rationnel r tel que $x < r < f(x)$ ou $f(x) < r < x$).

Exercice 1.26.

a) Montrer que si x, y sont deux rationnels différents, alors $\dfrac{x + y\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ est irrationnel.

b) Soit a et b tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $r \in]a, b[$. (Indication : utiliser le Théorème 1.3 page 12.)

Chapitre 2

Un peu de formalisme mathématique

2.1 Rudiments de logique

2.1.1 Connecteurs logiques

Une proposition est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux). En mathématique, on part d'un petit nombre de propositions que l'on suppose vraies (les axiomes) et l'on essaie d'étendre le nombre d'énoncés vrais au moyen de démonstrations. Pour cela on utilise des règles de logique.

À partir de deux propositions quelconques A et B, on en fabrique de nouvelles dont on définit la valeur logique en fonction des valeurs logiques de A et de B. Une table de vérité résume cela :

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

La phrase $(A \Rightarrow B)$ se lit "A implique B" et la phrase $(A \Leftrightarrow B)$ se lit "A est équivalent à B".
La phrase $(A \Rightarrow B)$ est aussi une proposition, dont la négation est

$$\boxed{(\text{non}(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \text{ et non } B)\,.}$$

L'évaluation des nouvelles propositions en fonction de la valeur des anciennes paraît naturelle sauf pour l'implication :

☞ **Remarque.** Si P est faux, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie ! Par exemple, $(x+1)^2 = x^2 + 2x \Leftrightarrow 1 = 0$ est vraie. Cela signifie que l'équivalence est vraie, pas que les propositions $(x+1)^2 = x^2 + 2x$ et $1 = 0$ sont vraies ! L'équivalence $(x+1)^2 = x^2 + 2x \Leftrightarrow 7 = 0$ est aussi vraie...

Exercice. En utilisant des tables de vérité, montrer que
- (non $(A$ ou $B)) \Leftrightarrow ($non A et non $B)$,
- (non $(A$ et $B)) \Leftrightarrow ($non A ou non $B)$,
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$,
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ($ non A ou $B)$.

Attention ! Attention aux parenthèses. Les phrases $(A \Rightarrow B)$ et C et $A \Rightarrow (B$ et $C)$ ne signifient pas la même chose. La phrase "$A \Rightarrow B$ et C" est ambigüe.

On utilise en mathématique l'implication pour obtenir de nouveaux résultats. Si l'on sait qu'un résultat A est vrai et si l'on montre que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors d'après la table de vérité, on en déduit que la proposition B est vraie, ce qui étend les résultats mathématiques.

Exercice. Écrire la négation de $a \leq b \leq c$ et de $a = b = c$.

Exercice. Montrer que
- [non (P ou Q)] $\Leftrightarrow$ [(non P) et (non Q)]
- [non (P et Q)] $\Leftrightarrow$ [(non P) ou (non Q)]
- [P ou (Q et R)] $\Leftrightarrow$ [(P ou Q) et (P ou R)]
- [P et (Q ou R)] $\Leftrightarrow$ [(P et Q) ou (P et R)]

2.1.2 Conditions nécessaires et suffisantes

- On dit que B est une *condition nécessaire* de A si $A \Rightarrow B$ (pour que A soit vrai, il faut que B soit vrai).
- On dit que B est une *condition suffisante* de A si $B \Rightarrow A$ (Pour que A soit vrai, il suffit que B soit vrai).
- On dit que B est une *condition nécessaire et suffisante* de A si $A \Leftrightarrow B$ (pour que A soit vrai, il faut et il suffit que B soit vrai).

2.1.3 Quantificateurs

Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un objet x d'un ensemble E. On note :
– $\forall x \in E$, $P(x)$ lorsque la propriété est vraie pour tous les éléments x de l'ensemble E ;
– $\exists x \in E$, $P(x)$ lorsqu'il existe au moins un élément x de l'ensemble E pour lequel la propriété est vraie ;
Il faut savoir nier une proposition dépendant de quantificateurs. La négation de "pour tout x, la proposition $P(x)$ est vraie" est "il existe un x tel que la proposition $P(x)$ soit fausse", c'est-à-dire

$$\boxed{\text{non}(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \text{non} P(x).}$$

De même,

$$\boxed{\text{non}(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \text{non} P(x).}$$

On utilise aussi la notation $\exists! x \in E$, $P(x)$ lorsqu'il existe un unique élément de l'ensemble E pour lequel la propriété est vraie.

Attention ! On n'utilise jamais les symboles $\nexists$ et $\not\forall$.

Exercice. Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y)$;
2. $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$;
3. $\exists r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq r$ et $s \leq r$.

☞ **Remarque.**
- Pour montrer une proposition de la forme : $\forall x \in E, P(x)$ (quel que soit x dans E, x vérifie une propriété), on commence la démonstration par : (Soit $x \in E$)....
- Pour montrer une proposition de la forme : $\exists x \in E$ tel que $P(x)$ (il existe un objet x vérifiant la propriété $P(x)$), il vous suffit d'exhiber un élément x vérifiant cette propriété. La démonstration contiendra alors sans doute la phrase : (Posons $x = \ldots$ Vérifions que x convient…).
- Pour montrer qu'une proposition de la forme : $\forall x \in E$, $P(x)$ est fausse (c'est-à-dire que $\exists x \in E$ tel que $P(x)$ est faux), il suffit d'exhiber un contre-exemple : (Posons $x = \ldots$). Pour cet élément x, $P(x)$ est fausse. (L'utilisation de contr-exemple est revue quelques pages plus loin).

Attention ! L'ordre des quantificateurs est important :
- $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n)$ est vrai,
- $(\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq n)$ est faux,

c'est-à-dire

$$\boxed{\text{on ne peut pas inverser } \forall \text{ et } \exists}.$$

Par contre on peut inverser deux $\forall$ et deux $\exists$:
- $(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y))$,
- $(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$.

2.1.4 Différents types de raisonnements

Raisonnement direct et par contraposée

Pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vrai, on peut utiliser l'un des deux raisonnements suivants :
– Raisonnement direct : Supposons A vrai, et montrons qu'alors B est vrai ;
– Raisonnement par contraposée : Supposons B faux et montrons que A est faux.
Cela vient du fait que

$$\boxed{(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))}$$

La phrase $((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))$ est la *contraposée* de $(A \Rightarrow B)$.

☠ **Attention !** Ne pas confondre contraposée et réciproque. La *réciproque* de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$. De l'une on ne peut **rien** dire sur l'autre.

♢ **Exemple.** soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrons que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier. La négation de la dernière proposition est n est non premier ce qui s'écrit il existe $p, q \in \mathbb{N}$ différents de 1 et n tel que $n = pq$. On a alors

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(1 + 2^p + \cdots + 2^{p(q-1)}).$$

La dernière égalité vient d'une propriété de $(a^n - b^n)$ (voir page 10) :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a \neq 1,\ 1 + a + a^2 + \cdots + a^m = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}.$$

Donc $2^p - 1$ divise $2^n - 1$ et il est différent de 1 car $p \neq 1$ et différent de $2^n - 1$ car $p \neq n$. Donc $2^n - 1$ n'est pas premier. Finissons le raisonnement : soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. tel que $2^n - 1$ est un nombre premier. Il y a deux cas pour n : n est premier ou n n'est pas premier. Or dans le deuxième cas, d'après ce que l'on vient de voir, ceci implique que $2^n - 1$ n'est pas premier. Donc n est premier.

Exercice. On considère un nombre réel $x \geq 0$ et les deux propositions :

1. A : Pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$;
2. B : $x = 0$.

Montrer que $A \Rightarrow B$.

Pour montrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on procède en deux temps :

1. On montre que $A \Rightarrow B$ est vrai ;
2. On montre que $B \Rightarrow A$ est vrai.

☞ **Remarque.** Pour montrer $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$, il suffit de montrer par exemple que $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow A$.

Raisonnement par l'absurde

On suppose qu'une proposition B est fausse. Si on aboutit à une contradiction avec une proposition A que l'on sait être vraie, alors on a montré que B est vraie. C'est par exemple ce qu'on a utilisé page 10 pour montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnement par récurrence

Un autre raisonnement classique est le raisonnement par récurrence. On l'utilise quand on veut montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La preuve se fait en trois étapes :
– on vérifie la propriété au premier rang $P(0)$,
– hypothèse de récurence : on suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$,
– montrons que celà implique que $P(n+1)$ est vraie (il y a un raisonnement à faire qui utilise l'hypothèse de récurrence !)

On en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'idée de la démonstration par récurrence peut s'écrire de la façon suivante :

$$(P(0) \text{ et } (P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (P(n) \forall n \in \mathbb{N}).$$

De la même façon on peut faire une *récurrence descendante*, à partir d'un rang n_0, pour montrer qu'une propriété est vraie à partir du rang n_0.

Exercice. Montrer que $2^n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Utilisation d'un contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition $\forall x \in E, P(x)$ (tous les éléments de E vérifient P) est fausse, on peut montrer que la négation de la phrase (qui est $\exists x \in E,$ non $P(x)$) est vraie. Il suffit d'exhiber un élément x de E qui ne vérifie pas P ; x s'appelle un *contre-exemple*.

♢ **Exemple.** Montrons que la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$ est fausse. La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < 1 \text{ et } x^2 \geq 1.$$

Or cette proposition est vraie, par exemple pour $x = -2$. Donc -2 est un contre-exemple à la première proposition.

Raisonnement par disjonction des cas

Un dernier raisonnement dont on va parler est le raisonnement par disjonction des cas. Pour montrer que tout $x \in A$ vérifie une propostion P, on considère toutes les possibilités pour x. C'est-à-dire si A peut s'écrire comme une réunion de A_i, alors il suffit de montrer que pour tout i, tout $x \in A_i$ vérifie la propostion P.

♢ **Exemple.** On veut montrer que si a est un réel non nul tel que $|x - a| < |a|$, alors x et a sont deux réels de même signe. On considère deux cas :

1. $a > 0$: $|a| = a$; l'inégalité devient $|x - a| < a \Longleftrightarrow 0 < x < 2a$.
2. $a < 0$: $|a| = -a$; l'inégalité devient $|x - a| < -a \Longleftrightarrow 2a < x < 0$. La proposition est montrée.

♢ **Exemple. Résolution d'équation et raisonnement par équivalence.** On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $3x + 2 = 0$. Résoudre l'équation signifie trouver toutes les solutions de l'équation c'est-à-dire tous les $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $3y + 2 = 0$. Autrement dit, il s'agit de déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{E}$ des $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $3y + 2 = 0$.

Considérons le raisonnement suivant :

Si x vérifie $3x + 2 = 0$ alors, en ajoutant -2 de chaque côté, $3x = -2$ et, en multipliant par $1/3$ de chaque côté, $x = -2/3$.

Ce raisonnement montre que si x est une solution alors forcément il vaut $-2/3$. En fait, il montre que $\mathcal{E}$ est inclu dans l'ensemble $\{-2/3\}$ (à un seul élément). Ou encore, il montre l'implication : $(3x + 2 = 0) \Rightarrow (x = -2/3)$. Il ne montre pas que $-2/3$ est solution. Il ne montre pas que l'ensemble $\mathcal{E}$ contient $\{-2/3\}$. Il ne montre pas non plus l'implication : $(x = -2/3) \Rightarrow (3x + 2 = 0)$.

Si l'on ajoute au raisonnement précédent, la remarque suivante : $3(-2/3) + 2 = -2 + 2 = 0$ alors on montre que $-2/3$ est solution de l'équation ou encore que $\mathcal{E}$ contient $\{-2/3\}$ ou encore l'implication $(x = -2/3) \Rightarrow (3x + 2 = 0)$.

Ces deux étapes montrent que l'équation a exactement une solution à savoir $-2/3$, ou encore que $\mathcal{E} = \{-2/3\}$ (puisque $\mathcal{E} \subset \{-2/3\}$ et $\{-2/3\} \subset \mathcal{E}$) ou encore l'équivalence $(x = -2/3) \Leftrightarrow (3x + 2 = 0)$.

Résoudre une équation se fait toujours en deux étapes. Mais cela revient à montrer une équivalence. Montrer une équivalence peut se faire par une suite d'équivalences qui permettent de faire les deux étapes en mÃªme temps. Dans l'exemple précédent, on peut procéder de la façon suivante.

Rappelons les deux propriétés suivantes de $\mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a = b) \Leftrightarrow (a + c = b + c)$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, $(a = b) \Leftrightarrow (ac = bc)$. On a alors, en utilisant la première propriété avec $a = 3x + 2$, $b = 0$ et $c = -2$, puis en utilisant la seconde avec $a = 3x$, $b = -2$ et $c = 1/3 \neq 0$,

$$(3x + 2 = 0) \Leftrightarrow (3x = -2) \Leftrightarrow (x = -2/3)$$

On cherche les solutions de l'équation suivante :

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 4x - 6 \Leftrightarrow \left(\left(x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(4x - 6)\right) \text{ et } (x \neq 1)\right)$$

On peut faire le raisonnement suivant. Si x est solution alors $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(4x - 6)$. En simplifiant, on trouve que $x = 1$. Ce raisonnement correspond au premier raisonnement dans l'exemple précédent. Il dit seulement que s'il y a une solution alors c'est 1. Mais il ne dit pas que 1 est solution et, d'ailleurs, c'est faux. En effet, pour $x = 1$, la fraction n'est pas définie car on n'a pas le droit de diviser par 0. Ces deux arguments montrent que l'équation ci-dessus n'a pas de solution.

2.2 Rudiments de théorie des ensembles

2.2.1 Inclusion

Definition 2.1. • *Si E et F sont deux ensembles, on note $E \subset F$ lorsque tous les éléments de E sont des éléments de F : $\forall x \in E$, $x \in F$.*
- *Un ensemble particulier est l'ensemble vide noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément, et pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$.*
- *Si x est un élément de E, on note $\{x\}$ l'ensemble constitué de l'élément x.*

Attention ! Si x est un élément de E, $x \in E$ et $\{x\} \subset E$.

Exercice. Écrire la négation de $E \subset F$ (ce que l'on note $E \not\subset F$).

Exercice. Soit l'ensemble $E = \{\{\emptyset\}, 1, \mathbb{N}, \{0, 1, 2\}\}$. Mettre le signe $\in$ ou $\notin$ et $\subset$ ou $\not\subset$ correct entre les objets suivants :
- $\emptyset ... E$;
- $\{\emptyset\} ... E$;
- $\mathbb{N} ... E$;
- $\{\emptyset, \mathbb{N}\} ... E$.

Definition 2.2. *Deux ensembles E et F sont* égaux*, ce qui est noté $E = F$, si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$*

Pour montrer que $E = F$, on utilise le plan suivant :
1. Montrons que $E \subset F$: soit x un élément de E, je veux montrer qu'il appartient à F ...
2. Montrons que $F \subset E$: soit x un élément de F, je veux montrer qu'il appartient à E ...

Definition 2.3. *L'*ensemble des parties *d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$, est*

$$\mathcal{P}(E) = \{A | A \subset E\}.$$

En particulier,

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

et $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide puisqu'il contient toujours l'ensemble vide (!), ainsi que l'ensemble E (qui peut-être vide).

Exercice. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{a, b\}$.

2.2.2 Intersection, union, complémentaire

Definition 2.4. *Soit E et F deux ensembles. On définit de nouveaux ensembles :*
- Intersection $E \cap F = \{x | x \in E \text{ et } x \in F\}$.
- Union *(ou* réunion*)* $E \cup F = \{x | x \in E \text{ ou } x \in F\}$ *; La réunion est* disjointe *si* $E \cap F = \emptyset$.
- Complémentaire $E \setminus F = \{x | x \in E \text{ et } x \notin F\}$.

☞ **Remarque.** Dans le cas où $F \subset E$, on note parfois le complémentaire de F dans E par $F^c = \{x \in E, x \notin F\} = E \setminus F$.

2.2.3 Produit cartésien

Definition 2.5. *Soit E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des (couples) (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. L'ensemble $E \times F$ s'appelle le* produit cartésien *des ensembles E et F.*

♢ **Exemple.** Le plan $\mathbb{R}^2$ est simplement $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.2.4 Lien entre connecteurs logiques et relations ensemblistes

Si A est un ensemble, on peut dire que x vérifie une propriété P si $x \in A$. Alors x ne vérifie pas P (x vérifie non P) si $x \notin A$. Si B est un autre ensemble, et Q est vraie si $x \in B$, alors $A \cup B$ est l'ensemble des x qui vérifient (P ou Q), et $A \cap B$ est l'ensemble des x qui vérifient (P et Q). Ainsi les résultats sur les connecteurs logiques se traduisent en résultats sur les ensembles.

♢ **Exemple.** Soit P la propriété $(x \in A)$. Donc $(x \in A^c)$ est non P. Comme non (non P))$\Leftrightarrow P$, on a que $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \in A$, c'est-à-dire $(A^c)^c = A$.

Exercice. On considère trois ensembles A, B, C. Montrer que

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$.

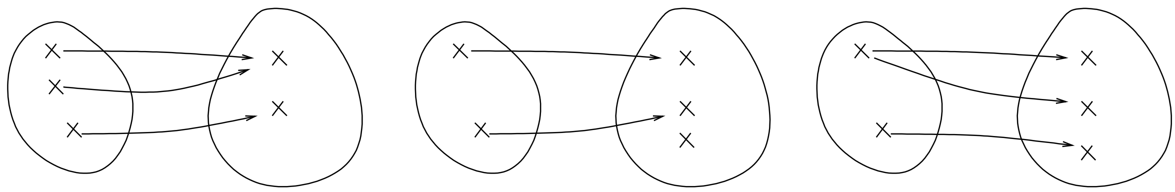
2.2.5 Applications

Definition 2.6. *Soit E et F deux ensembles. Une* application *$f: E \to F$ e st la donnée pour tout $x \in E$ d'un* **unique** *élément noté $f(x)$ de F. L'élément x est un* antécédent *de y, y est* l'image *de x par f, E est* l'ensemble de départ *et F est* l'ensemble d'arrivée. *Ainsi, par une application f tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule :*

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, y = f(x).$$

☞ **Remarque.** Il peut y avoir aucun, un, ou plusieurs antécédents.

Exercice. Une des correspondence ci-dessous n'est pas une application. Laquelle ? Pourquoi ?



Definition 2.7. *Deux applications f et g sont* égales *(notation : $f = g$) si elles ont les mêmes ensembles de départ E et d'arrivée F et si $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.*

Definition 2.8. *Soit E un ensemble. On appelle* identité *de E l'application*

$$id_E : \begin{cases} E \mapsto E \\ x \to x \end{cases}$$

Definition 2.9. *Soit f une application de E dans F. On appelle la* restriction de f à $A \subset E$ *l'application $g : A \to F$ telle que $g(x) = f(x), \forall x \in A$.*

Definition 2.10. *Soit f une application de E dans F et A tel que $E \subset A$. Une application $g: A \to F$ telle que $g(x) = f(x), \forall x \in E$ est un* prolongement *de f à A.*

Definition 2.11. *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F. Soit $A \subset E$. On appelle l'*image directe *de A par f le sous ensemble de F :*

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

On peut écrire

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists a \in A; y = f(a).$$

Proposition 2.12. *Soit A et B deux parties quelconques de E et f une application de E dans F. On a*

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B),$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Démonstration. Montrons la dernière inclusion : soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe alors $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A \cap B \subset A$, $f(x) \in f(A)$ et comme $x \in A \cap B \subset B$, $f(x)$ est aussi un élément de $f(B)$. Donc $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Pourquoi n'a t'on pas l'égalité, regardons l'inclusion inverse : soit $y \in f(A) \cap f(B)$; donc il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Malheureusement, on ne sait pas si $x_1 = x_2$! □

Definition 2.13. *Soit f une application de E dans F et $B \subset F$. On appelle* image réciproque *de B par f le* **sous-ensemble** *de E noté $f^{-1}(B)$:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

On peut écrire

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Attention ! On a défini l'ensemble $f^{-1}(B)$, la notation f^{-1} ne signifie rien pour l'instant (nous n'avons pas supposé que f est une bijection, voir plus loin).

Proposition 2.14. *Soit A et B deux parties quelconques de E et f une application de E dans F. On a*

$$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exercice. Quel rapport entre $f^{-1}(f(A))$ et A et entre $f(f^{-1}(B))$ et B ?

Definition 2.15. *Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. La* composée *de f par g est l'application notée $g \circ f$ définie de E vers G par*

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

2.2.6 Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit f une application de E dans F.

Definition 2.16. *On dit que f est une application* injective *si tout élément y de F possède au plus un antécédent $x \in E$ par f. De façon équivalente :*

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow \forall (x, x') \in E \times E, (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')),$$
$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow \forall (x, x') \in E \times E, (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'),$$
$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow \forall (A, B) \in P(E) \times P(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Definition 2.17. *On dit que f est une application* surjective *si tout élément y de F possède au moins un antécédent $x \in E$ par f. De façon équivalente :*

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow f(E) = F.$$

Definition 2.18. *On dit que f est une application* bijective *si tout élément y de F possède un unique antécédent $x \in E$ par f. De façon équivalente :*

$$f \text{ est bijective } \Longleftrightarrow \forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

On définit alors une application de F dans E notée f^{-1} définie par

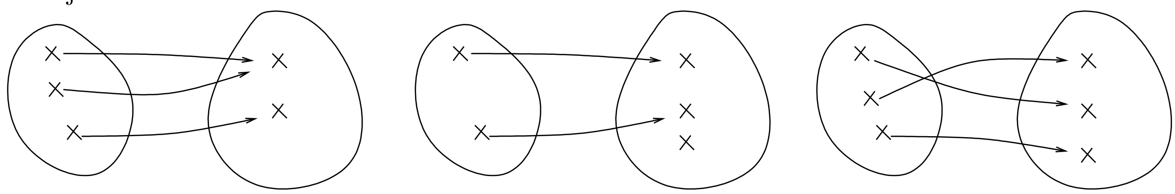
$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x).$$

*On l'appelle l'*application réciproque.

Exercice. Montrer qu'une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercice. Montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ (id_E est l'application identité de E.

Exercice. Parmi les applications ci-dessous, quelles sont celles qui sont injectives ? surjectives ? bijectives ?



☞ **Remarque.** Si E et F sont des ensembles ayant un nombre fini d'éléments, et f est une application entre E et F. On note $|E|$ (resp. $|F|$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Alors

- (f injective) $\Rightarrow |E| \leq |F|$,
- (f surjective) $\Rightarrow |E| \geq |F|$,
- (f bijective) $\Rightarrow |E| = |F|$.

Exercice. Soit f une application bijective de E dans F et $B \subset F$. On a que $f^{-1}(B)$ est l'image de B par l'application f^{-1}. Vérifier que cet ensemble est le même que celui de la définition 2.13.

Proposition 2.19.

- *f est injective si et seulement si pour tout sous-ensemble A de l'ensemble de départ, on a $f^{-1}(f(A)) = A$.*
- *f est surjective si et seulement si pour tout sous-ensemble B de l'ensemble d'arrivée, on a $f(f^{-1}(B)) = B$.*

Proposition 2.20. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors*

- *si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,*
- *si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,*
- *si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,*
- *si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,*
- *si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

2.3 Exercices

Exercice 2.1. Dans chacun des cas suivants, l'énoncé (2) est-il une CS, CN ou CNS de (1) ?

a) (1) : $x^2 \geq x$ (2) : $x \geq 1$

b) (1) : n impair (2) : n^2 impair

c) (1) : pour tout $n \in \mathbb{N}, x \geq n$ (2) : $x \geq 10^{10}$

d) (1) : $x \in [1, 3]$ (2) : $x \in [1, 4]$

Exercice 2.2. Écrire la négation des phrases suivantes.

a) $\forall a \in A, \exists b \in B, (a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1)$

b) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \alpha$ et $|x^2 - 1| \geq \epsilon$

Exercice 2.3. Montrer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x \geq 0$

Exercice 2.4. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres positifs. Montrer que si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ alors $\forall i \; a_i = 0$.

Exercice 2.5. Montrer

a) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1, 3], |x - 2| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon$

b) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-2| < \alpha \Rightarrow |x^2-4| < \epsilon$

Exercice 2.6. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On note

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{appelée } \textit{partie symétrique}.$$

Montrer que $\forall A, B, C$, $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$. (Indication : faire le tableau de vérité pour deux ensembles $A\Delta B$ puis pour 3 ensembles $A\Delta(B\Delta C)$ et $(A\Delta B)\Delta C$.)

Exercice 2.7. Soit A et B deux parties de E. Discuter et résoudre

$$A \cup X = B$$

d'inconnue $X \in P(E)$.

Exercice 2.8. Écrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs. Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.

1. Tout entier naturel divisible par 6 est divisible par 3.
2. Tout entier naturel divisible par 2 et 3 est divisible par 6.
3. Tout entier naturel divisible par 2 et 14 est divisible par 28.

Exercice 2.9. Soit f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer la propriété et sa négation.

1. $\forall i \in \{1,2,3\}, \exists a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$
2. $\exists i \in \{1,2,3\}, \forall a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$

Exercice 2.10. Placer les symboles $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ qui conviennent entre les propositions et écrire les contraposées des implications.

1. $(a)\, x \leq 0 \quad (b)\, x < 0$
2. $(a)\, |x - x_0| < \alpha \quad (b)\, x < x_0 + \alpha$
3. $(a) \forall x,\ x$ vérifie la propriété P $\quad (b) \exists x,\ x$ vérifie la propriété P
4. $(a)\, A \cap B = A \quad (b)\, A \subset B$
5. $(a)\, A \cup B = A \quad (b)\, B \subset A$

Exercice 2.11. Prendre la négation des phrases suivantes :

a) $\exists n \in \mathbb{N}, n2 < n+1$.

b) $\forall a \in A,\ \exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1$.

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha \Longrightarrow |x^2-1| < \varepsilon$.

Exercice 2.12. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes.

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I\ f(x) = C$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.
4. $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 2.13. Soit E un ensemble. Pour A une partie de E, on note 1_A la *fonction indicatrice* (ou caractéristique) de E :

$$1_A : E \to [0,1], 1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

a) $E = \mathbb{R}$. Donner le graphe de $1_{[0,1]}$ et $1_{[0,1] \cup [2,3]}$.

b) Montrer que si $A \subset B$ alors $1_A \leq 1_B$.

c) Montrer que $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$

d) Déterminer une relation entre $1_{A\cup B}$, 1_A et 1_B
e) Que peut-on dire de $1_{A\cup B\cup C}$?

Exercice 2.14.
a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
b) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des entiers pairs.
c) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.
d) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
e) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
f) Déterminer une bijection de $\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}^*\}$ dans $\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\}$.
g) Déduire de l'exemple précédent une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.

Exercice 2.15.
a) Montrer que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 2x+5$ est bijective. Calculer f^{-1}.
b) Montrer que $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, (x,x')\mapsto(x+x',x-x')$ est bijective. Calculer f^{-1}.

Exercice 2.16. Montrer par récurrence :

1. Pour tout réel $q\neq 1,\ 1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. $\forall n\ N^*,\ 1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)2}{4}$.
3. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (1\times 2)+(2\times 3)+\cdots+(n\times(n+1))=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
4. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 9 divise 10^n-1.
5. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{n^3-n}{3}\in\mathbb{N}$.
6. $\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\ |sin(nx)|\leq n|sin(x)|$.

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Généralités sur les suites

3.1.1 Définition

Une *suite* (numérique ou réelle) est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image $u(n)$ de n par u est notée traditionnellement u_n, qu'on appelle le terme de rang n de la suite. Souvent une suite est identifiée avec son image : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1.2 Croissance, décroissance

Definition 3.1.

- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* croissante *si elle est croissante en tant que fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire*
$$p > q \Rightarrow u_p \geq u_q$$
. C'est èquivalent à
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}.$$
- *elle est* strictement croissante *si*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$
- *On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est* décroissante *(resp.* strictement décroissante*) si la suite $(-u_n)_n$ est croissante (resp. strictement croissante), c'est-à-dire*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1} (resp\ u_n > u_{n+1}).$$
- *$(u_n)_n$ est dite* monotone *(resp.* strictement monotone*) ssi (u_n) est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante).*

Definition 3.2.

- *Une suite u est* constante *si $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = c$.*
- *Une suite u est* stationnaire *si $\exists c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n = c$.*

3.1.3 Majoration

Definition 3.3.

- *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est* majorée *par A si A est un majorant de l'ensemble des termes de la suite c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq A$. On dit que la suite est* minorée *par A si A est un minorant de l'ensemble des termes de la suite c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq A$. On dit que la suite est* bornée *par A si $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq A$ (la suite est majorée et minorée).*

☞ **Remarque.** Si la suite u est croissante (resp. décroissante) alors elle est minorée (resp. majorée) par son premier terme u_0.

Exercice. Soit u et v deux suites bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u + v$ et λu sont bornées.

Exercice. Donner un exemple de suite :

1. Croissante et majorée.
2. Ni croissante, ni décroissante.
3. Ni majorée, ni minorée.
4. Croissante, non strictement croissante ni stationnaire.

3.1.4 Propriétés dépendant du rang

Une propriété $P(n)$ est *vraie à partir d'un certain rang* si $\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow P(n)$ est vraie

Exercice. Écrire à l'aide de quantificateur les propriétés suivantes :

1. La suite u est positive à partir d'un certain rang.
2. La suite u est constante à partir d'un certain rang. Comment s'appelle une telle suite ?
3. La suite u est croissante à partir d'un certain rang.

3.2 Convergence et divergence

3.2.1 Suites convergentes

Definition 3.4. *On dit qu'une suite u est* convergente *vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.}$$

l s'appelle la limite *de la suite, et on note $u_n \to l$.*

On dit que la suite est divergente *si elle n'est pas convergente c'est à dire :*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

☞ **Remarque.** On peut montrer que dans la définition on peut remplacer $\leq \varepsilon$ par $< \varepsilon$.

☞ **Remarque.** La convergence de u vers l est la même chose que la convergence de $u - l$ vers 0.

☞ **Remarque.** Dans la définition, l'entier N dépend de ε (voir l'exemple ci-dessous).

Pour montrer que $u_n \to l$, on peut utiliser le plan suivant :

1. Soit $\varepsilon > 0$
2. Posons $N = \ldots$
3. Vérifions : Soit $n \geq N$
4. On a bien $|u_n - l| \leq \varepsilon$
5. Donc $u_n \to l$.

♢ **Exemple.** Montrons avec la définition que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}, n > 0$ converge vers 0 :

$$\boxed{\frac{1}{n} \to 0}$$

Soit $\varepsilon > 0$. La question à resoudre est la suivante : existe-t-il un entier N tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N, \Rightarrow\ |u_n| \leq \varepsilon$? Or $|u_n| \leq \varepsilon$ signifie que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ c'est à dire $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ implique que $|u_n| \leq \varepsilon$. On doit choisir un entier $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$, on prendra $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N, \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$$

ce qui est la définition de la convergence vers 0.

Exercice. Montrer que $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$ tend vers $3/2$ en utilisant la définition.

Exercice. Montrer en utilisant la définition que si $u_n \to a$, $u_n \geq 0\, \forall n, a \geq 0$, alors $\sqrt{u_n} \to \sqrt{a}$.

Proposition 3.5. *La limite d'une suite convergente est unique.*

Démonstration. Faisons un raisonnement par l'absurde : supposons que u_n converge à la fois vers l_1 et l_2 avec $l_1 \neq l_2$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2|$. D'après la définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. Soit $N = max(N_1, N_2)$. On a $|u_N - l_1| \leq \varepsilon$ et $|u_N - l_2| \leq \varepsilon$. D'où,

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_N| + |l_2 - u_N| \leq \frac{2}{3}|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|.$$

Ce qui est absurde, donc l'hypothèse de départ est fausse. □

Definition 3.6. *Soit u une suite réelle. On dit que la suite* tend vers $+\infty$ *si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_*^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A).$$

On dit que la suite tend vers $-\infty$ *si et seulement si*

$$\forall B \in \mathbb{R}_*^-, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq B).$$

☠ **Attention !** Une suite qui tend vers $+\infty$ est une suite divergente. En particulier une suite ne converge pas vers l'infini…

Toute suite divergente ne tend pas vers l'infini, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

Pour montrer que $u_n \to +\infty$, on peut utiliser le plan suivant :

1. Soit $A > 0$
2. Posons $N = ..$
3. Vérifions : Soit $n \geq N$
4. On a bien $u_n \geq A$.

Exercice. Montrer en utilisant la définition que $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Proposition 3.7. *1) Toute suite convergente est bornée.*
2) Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée.
3) Toute suite réelle qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Démonstration. Pour 1). Supposons que $u_n \to l$. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq 1.$$

En utilisant l'inégalté triangulaire, on a pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq |l| + 1$. La suite est majorée par $M = max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_N|, |l| + 1)$.

Pour 2). Supposons que $u_n \to +\infty$. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq 1.$$

Donc la suite est minorée par $m = inf(u_0, u_1, \ldots, u_N, 1)$.

Pour 3), on applique 2) à $-u_n$ pour obtenir 3). □

♢ **Exemple. Suites arithmétiques** La suite de terme général u_n est *arithmétique* s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. r s'appelle la *raison* de la suite. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$. D'autre part la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)(u_0 + u_n)/2$.

♢ **Exemple. Suites géométiques** La suite de terme général u_n est *géométique* s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ru_n$. r s'appelle la *raison* de la suite. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 r^n$. D'autre part la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ si $r \neq 1$. On a les cas suivants :

1. si $|r| < 1$ la suite $(r^n)_n$ converge vers 0.
2. si $r = 1$ la suite $(r^n)_n$ converge vers 1.
3. si $r = -1$ la suite diverge.
4. si $|r| > 1$ la suite $(r^n)_n$ diverge et $|r|^n$ diverge vers $+\infty$.

En effet, si $|r| > 1$, on peut écrire $|r| = 1 + h$ avec $h > 0$. On a alors

$$|r|^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq 1 + nh \to +\infty.$$

Si $|r| < 1$ et $r \neq 0$, on a $\frac{1}{|r|} > 1$, donc $(\frac{1}{|r|}^n) \to +\infty$. Ce qui implique que $|r|^n \to 0$ soit $r^n \to 0$. Si $r = -1$ la suite n'a pas de limite, voir paragraphe sur les suites extraites.

☞ **Remarque.** Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particulier de suites récurrentes, voir 5.3.6 page pagerefsuites recurrentes.

3.2.2 Suites extraites et convergence

Definition 3.8. *On appelle* extractrice *une application* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **strictement** *croissante. Étant donné une suite* $(u_n)_n$*, on appelle* suite extraite *de* $(u_n)_n$ *toute suite* $(u_{\sigma(n)})$ *avec* σ *une extractrice.*

☞ **Remarque.** L'extractrice σ doit être strictement croissante. Par exemple $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites, mais (u_{n^2-n}) n'est pas une suite extraite car $\sigma(n) = n^2 - n$ n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{N}$ (on a $\sigma(0) = \sigma(1)$).

☞ **Remarque.** Si σ est un extractrice, alors $\sigma(n) \geq n$. Si $\sigma(n) = n$ alors σ est l'identité et la suite extraite correspondante est la suite entière.

Proposition 3.9. *Si la suite* u *converge vers* l*, alors toute suite extraite converge vers* l*.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \sigma(n) \geq \sigma(N) \geq N \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - l| \leq \varepsilon.$$

□

Corollaire 3.10 (Pour montrer qu'une suite est divergente)**.** *Soit* u *une suite. On suppose qu'il existe deux suites extraites* v *et* w *de* u *telles que*

1. $v_n \to a$
2. $w_n \to b$
3. $a \neq b$

Alors la suite u *est divergente.*

♢ **Exemple.** montrons que si $r \leq -1$ la suite géométrique $(r^n)_n$ n'a pas de limite finie ou infinie.

1. si $u_n = (-1)^n$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ donc la suite n'a pas de limite finie ou infinie.
2. si $u_n = (r^n)$ avec $r < -1$; $u_{2n} = |r|^{2n}$ et $u_{2n+1} = -|r|^{2n+1}$. Donc la suite n'a pas de limite finie ou infinie.

Corollaire 3.11. *Si la suite* u_n *a ses deux suites extraites* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *qui sont convergentes et ont la même limite alors elle est convergente vers cette même limite.*

Démonstration. Supposons que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - l| \leq \varepsilon$ et $\forall p \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon$. Soit $N = max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Pour tout $n \geq N$, soit n est pair et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et $n \geq 2N_1$ entraine que $p \geq N_1$ donc $|u_n - l| \leq \varepsilon$ soit n est impair et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$ et $n \geq 2N_2 + 1$ entraine que $p \geq N_2$ donc $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Donc,

$$\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

□

3.2.3 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Corollaire 3.12. *Soit une suite* u *qui converge vers* l *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*.*
1) si $a < l$ *alors il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N_1$*, on a* $u_n > a$*.*
2) si $l < b$*, il existe un entier* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N_2$*, on a* $u_n < b$*.*
3) si $a < l < b$*, il existe un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, on a* $a < u_n < b$*.*

Démonstration. 1) Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq 1/2(l - a) < l - a$. Or $|u_n - l| < l - a \Rightarrow u_n - l > -(l - a)$. D'où $u_n > a$ pour tout $n \geq N_1$. □

Proposition 3.13 (Passage à la limite dans une inégalité)**.** *On suppose qu'il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N_1$ $u_n \geq a$ *(ou* $u_n > a$*). Si* u_n *a pour limite* l *alors on a* $l \geq a$*.*

Démonstration. Montrons la contraposée. supposons $l < a$. D'après la proposition précédente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow u_n < a$. Donc $\forall N_1 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1$ et $u_n < a$. □

Attention ! Si on a pour tout $n \geq N$, $u_n > a$ et $u_n \to l$, alors on ne peut **pas** en déduire que $l > a$. Par exemple pour tout n, $1/n > 0$ et $1/n$ tend vers 0, et on a pas $0 > 0$! Moralité : les $<, >$ se transforment en $\leq, \geq$ par passage à la limite.

Théorème 3.14 (Théorème d'encadrement (dit des gendarmes))**.** *Soit u, v et w trois suites réelles telles que*

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow\ u_n \leq v_n \leq w_n \\ u_n \to l \text{ et } w_n \to l \end{cases}$$

alors $v_n \to l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ et $n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon$. Soit $N_0 = max(N, N_1, N_2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq N_0 \Rightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n, \\ |u_n - l| \leq \varepsilon, \\ |w_n - l| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$, implique que $-\varepsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \varepsilon \Rightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$. □

Théorème 3.15 (Théorème de majoration)**.** *Soit* (u_n) *une suite et un réel* $l \in \mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe une suite* (α_n) *tel que*

$$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \alpha_n.$$

On suppose que $\alpha_n \to 0$. *Alors* $u_n \to l$ *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration. On a

$$-\alpha_n \leq u_n - l \leq \alpha_n \ \ \forall n \geq N.$$

Comme $-\alpha_n \to 0$ et $\alpha_n \to 0$, on a d'après le théorèmes des gendarmes $u_n - l \to 0 \Leftrightarrow u_n \to l$. □

Corollaire 3.16. *Soit u et v deux suites réelles tel que*

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n, \\ u_n \to +\infty, \end{cases}$$

alors $v_n \to +\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1, \Rightarrow u_n \geq A$. Soit $N_2 = max(N, N_1)$.

$$\forall n \geq N_2, \begin{cases} u_n \leq v_n, \\ u_n \geq A. \end{cases}$$

Donc, $\forall n \geq N_2$, on a $v_n \geq A$. □

Corollaire 3.17. *Soit u et v deux suites réelles tel que*

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n, \\ v_n \to -\infty, \end{cases}$$

alors $u_n \to -\infty$.

3.2.4 Propriétés algébriques des suites réelles convergentes

Proposition 3.18. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$, u_n, v_n *deux suites,* $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. *On a*

1. $u_n \to l \Rightarrow |u_n| \to |l|$.
2. $u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0$.
3. $\begin{cases} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n \to l + l'$.
4. $u_n \to l \Rightarrow \lambda u_n \to \lambda l$.
5. $\begin{cases} u_n \to 0 \\ v_n \text{ est bornée} \end{cases} \Rightarrow u_n v_n \to 0$.

6. $\left\{\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right. \Rightarrow u_n v_n \to ll'$.
7. $\left\{\begin{array}{l} u_n \to l \\ l \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$.
8. $\left\{\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \\ l' \neq 0, \end{array}\right. \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \to \frac{l}{l'}$.

Démonstration. Les démonstrations se font avec la définition.

1. soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. Or on a $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$. Donc $\forall n \geq N \Rightarrow ||u_n| - |l|| \leq \varepsilon$.
2. Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$. Or on a $||u_n| - 0| \leq |u_n| = |u_n - 0|$. D'où l'équivalence.
3. Soit $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon/2$ et $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| \leq \varepsilon/2$. Posons $N = max(N_1, N_2)$, et sachant que $|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$, on a $\forall n \geq N \Rightarrow |u_n + v_n - l - l'| \leq \varepsilon$.
4. Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1}$. Donc, $n \geq N \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| \leq \frac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda|+1} \leq \varepsilon$.
5. (v_n) est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{|M|+1}$. Donc $\forall n \geq N \Rightarrow |u_n v_n| \leq \frac{|M|\varepsilon}{|M|+1} \leq \varepsilon$.
6. on a $u_n v_n = (u_n - l)v_n + l v_n$. D'après 4) on a $l v_n \to ll'$. D'autre part, on a $u_n - l \to 0$ et v_n est bornée car convergente donc d'après 5) $(u_n - l)v_n \to 0$. Donc $u_n v_n \to ll'$.
7. $v_n \to l' \Rightarrow |v_n| \to |l'|$. D'autre part, comme $|l'| > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - l'| \leq \frac{|l'|}{2}$. Donc on obtient $n \geq N_1 \Rightarrow |v_n| \geq \frac{|l'|}{2}$. En outre $|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}| = \frac{|v_n - l'|}{v_n l'} \leq \frac{2}{|l'|^2}|v_n - l'|$. Or $|v_n - l'| \to 0$ d'où le résultat.
8. $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$ or $u_n \to l$ et $\frac{1}{v_n} \to \frac{1}{l'}$ d'où le résultat.

□

☞ **Remarque.** Les quatre formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.
Exemple 1 : $u_n = n^2 \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to +\infty$.
Exemple 2 : $u_n = n + 1 \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ alors $u_n + v_n \to 1$.
Exemple 3 : $u_n = n + (-1)^n \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ alors $u_n + v_n$ n'a pas de limite.

♢ **Exemple.** La suite de terme général $(-1)^n/n$ tend vers 0 et celle de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite. De même la suite $n/(-1)^n$ n'a pas de limite.

3.2.5 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si tout élément de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite d'éléments de A. Le lecteur est invité à vérifier que cette définition correspond à celle donnée page 12 pour le cas où $A = \mathbb{Q}$.

3.2.6 Suites de Cauchy

Definition 3.19. *La suite u est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq N \Longrightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

Exercice. Écrire la négation de la définition.

Théorème 3.20. *Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. au programme : si elle est convergente vers l alors elle est de Cauchy. soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N, \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon/2$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire on a $\forall n \geq N, \forall p \geq N$, on a $|u_n - u_p| \leq |u_n - l| + |u_p - l| \leq \varepsilon$.

□

☞ **Remarque.** Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy.

Exercice. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente.

Exercice. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge INDICATION

3.3 Cas des suites monotones

3.3.1 Borne supérieure, borne inférieure dans $\mathbb{R}$

Definition 3.21. *La* borne supérieure *de $A \subset \mathbb{R}$, notée* $\sup A$, *est le plus petit des majorants et la* borne inférieure *de $A \subset \mathbb{R}$, notée* $\inf A$, *est le plus grand des minorants.*

☞ **Remarque.** Majorants et minorants ont été définis page 12.

Attention ! Le sup n'est pas forcément le plus grand élément, car par définition le plus grand élément d'un ensemble doit appartenir à l'ensemble.

Par exemple, l'ensemble $A =]0,1[$ admet -1, 0 comme minorants et la borne inférieure est 0 et elle n'appartient pas à A. D'autre part, 10, 4 et 1 sont des majorants et la borne supérieure est 1. Un autre exemple, $A =]-\infty, a]$ n'a pas de minorant donc n'a pas de borne inférieure et a une borne supérieure a qui est dans A qu'on appelle aussi maximum.

Exercice. Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$.
2. $A \cup B$ est majoré et déterminé $\sup(A \cup B)$.
3. $A + B$ est majoré et déterminé $\sup(A + B)$.

Propriété caractéristique de la borne inférieure

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

$$m = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant,} \\ \forall a \in A, m < a, \exists a' \in A, m < a' \leq a. \end{cases}$$

Propriété caractéristique de la borne supérieure

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

$$M = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant,} \\ \forall a \in A, a < M, \exists a' \in A, a \leq a' < M. \end{cases}$$

3.3.2 Propriété caractéristique de $\mathbb{R}$

Théorème 3.22 (Admis)**.** *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Exercice. Pour A et B parties de $\mathbb{R}$, on définit $A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$.

- $A = [0,1[$, $B = \{1\}$; $A \cup B = ?$, $A + B = ?$
- On suppose que A et B admettent un plus grand élément. Montrer que $A + B$ admet un plus grand élément et que $\max(A + B) = \max A + \max B$.

Maintenant on suppose que A et B sont majorées.

- Montrer que $A \cup B$ et $A + B$ sont majorées.
- Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- Que peut-on dire de $\sup(A \cup B)$?
- Est-ce que $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$?

Exercice. Soit $E \subset [0,1]$ et f une application de E dans E. Justifier l'existence de $f(\sup A)$ et de $\sup f(A)$ $\forall A \in P(E)$ non vide.

Théorème 3.23. 1) *Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*
2) *Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.*

Démonstration. Supposons que (u_n) est croissante et majorée. $\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure l d'après le théorème 3.22. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la propriété caractéristique de la borne supérieure, on sait alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, $l - \varepsilon \leq u_N \leq l$. Comme la suite est croissante, $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N$ donc on a $\forall n \geq N$, $l - \varepsilon \leq u_n \leq l \leq l + \varepsilon \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. □

Théorème 3.24. 1) *Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
2) *Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Démonstration. 1) : soit $A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $u_N \geq A$. Comme la suite est croissante, $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq A$. 2) se fait de la même façon. □

3.3.3 Suites adjacentes

Definition 3.25. *Deux suites u et v sont* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante, et la suite $(u - v)$ converge vers 0.*

Proposition 3.26. *Si deux suites u et v sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite.*

Démonstration. Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Soit $w_n = v_n - u_n$, on a $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$. Donc la suite (w_n) est décroissante et tend vers 0. Donc cette suite est positive. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$. Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0. Donc elle converge vers l. En outre (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers l'. Or $u_n - v_n \to 0$, donc $l = l'$. On remarque aussi que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

□

Théorème 3.27 (Théorème des segments emboités)**.** *Soit a et b deux suites tels que*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \\ b_n - a_n \to 0 \end{cases}$$

alors il existe un réel l unique tel que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}.$$

Attention ! Le théorème n'est vrai qu'avec des intervalles fermés.

Démonstration. Les suites a et b sont adjacentes et ont donc une limite commune (unique) l, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$. Ainsi $\{l\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}}$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ (l'intersection est non-vide puisqu'elle contient l). Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq x \leq b_n$, et par passage à la limite on obtient $l \leq x \leq l$, donc $x = l$, ce qui signifie que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \subset \{l\}$. □

3.3.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.28 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite réelle bornée, on peut en extraire une suite convergente.*

Démonstration. On va procéder par *dichotomie*. Soit (u_n) une suite bornée, on va construire par récurrence deux suites a_n et b_n adjacentes puis une extractrice σ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\sigma(n)} \in [a_n, b_n]$.

Comme (u_n) est bornée il existe $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leq u_n \leq b_0$. Montrons pour tout n, la propriété P_n suivante : il existe deux suites a_n et b_n tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} a_n \leq b_n \\ \{k \in \mathbb{N},\ u_k \in [a_n, b_n]\} \text{ est infini} \\ b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0). \end{array}\right.$$

Pour $n = 0$ la propriété est vraie. Supposons que P_n est vraie pour un certain n. Considérons le milieu $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ de $[a_n, b_n]$. Il est clair que l'un des deux intervalles $[a_n, m_n]$ ou $[m_n, b_n]$ est tel que l'ensemble des k tel que u_k soit dans cet intervalle est infini. Il existe donc (a_{n+1}, b_{n+1}) tel que

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} \leq b_{n+1} \\ \{k \in \mathbb{N},\ u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\} \text{ est infini} \\ b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0). \end{array}\right.$$

On définit une extractrice σ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma(0) = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} k > \sigma(n) \\ u_k \in [a_n, b_n] \end{array}\right. \quad \text{et on pose } \sigma(n+1) = k. \end{array}\right.$$

On a ainsi construit deux suites a_n et b_n et une extractrice σ telles que

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n,\ a_n \leq b_n, \\ \forall n,\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \\ \forall n,\ b_n - a_n \to 0, \\ \forall n,\ u_{\sigma(n)} \in [a_n, b_n]. \end{array}\right.$$

D'après le théorème des segments emboités, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{l\}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma(n)} - l| \leq (b_n - a_n) \to 0$. □

Exercice. Soit k un réel tel que $0 < k < 1$. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k|u_{n+1} - u_n|.$$

1. Démontrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$ pour tout entier $n \geq 0$.
2. Démontrer que si p et q sont deux entiers tels que $p \geq q \geq 0$ alors
$$|u_p - u_q| \leq k^q \frac{|u_1 - u_0|}{1 - k}.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

3.4 Exercices

Exercice 3.1. Soit u et v deux suites bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u + v$ et λu sont bornées.

Exercice 3.2. Écrire à l'aide de quantificateur les propriétés suivantes :

a) La suite u est positive à partir d'un certain rang.

b) La suite u est constante à partir d'un certain rang. Comment s'appelle une telle suite ?

c) La suite u est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 3.3. Donner un exemple de suite :

a) Croissante et majorée.

b) Ni croissante, ni décroissante.

c) Ni majorée, ni minorée.

d) Croissante, non strictement croissante ni stationnaire.

Exercice 3.4.

a) Écrire la définition de “la suite u est divergente”.

b) Montrer à l'aide de la définition de la limite que la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0.

Exercice 3.5. Soit u la suite définie par $u_1 = 0,9$, $u_2 = 0,99$, $u_3 = 0,999$, $u_4 = 0,9999$, ...

a) A quoi est égal $|u_n - 1|$?

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

c) On note souvent $\overline{0,9}$ le réel $0,99999999\ldots$ Donner une définition rigoureuse de ce nombre. A quoi est-il finalement égal ?

d) Montrer que la suite u tend vers 1^- (i.e 1 par valeur inférieure). Existe t'il un réel qui s'appelle 1^- ?

e) A quoi est égal $\overline{0,3}$?

Exercice 3.6. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants.

a) $(-1)^n \frac{n+1}{n}$

b) $\frac{n}{n+1}$

c) $\frac{1}{n^2+1}$

d) $\frac{n}{n^2+1}$

e) $n - \sqrt{n^2 - n}$

f) $\sqrt{n(n+a)} - n, a \in \mathbb{R}$

g) $\frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$

h) $\frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

i) $\sin(\frac{2n\pi}{3})$

j) $\frac{E(nx)}{n}$

k) $\frac{\cos(n\theta)}{n}$.

Rappel : $\sin(k\pi) = 0, k \in \mathbb{N}$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Exercice 3.7. Soit $A = \left\{ \frac{1+\cos n}{n} | n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a) Soit u la suite de terme général $\frac{1+\cos n}{n}, n \geq 1$. Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

b) Montrer que A admet un max.

c) Calculer $\inf A$. Existe t-il un min ?

Exercice 3.8. Soit u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On définit les suites u et v par $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$. Montrer que $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. En déduire que ces deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 3.9. Montrer que

$$\bigcap_{n\geq 1} \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right] = [1, 2].$$

Exercice 3.10. Montrer que la suite de terme général $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ ne converge pas.

Exercice 3.11. Étudier la convergence des suites de termes généraux

a) $\sin \frac{n\pi}{7}$

b) $\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Exercice 3.12. Soit a et b les suites définies par $a_0, b_0 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Montrer que ces suites sont adjacentes (montrer que $\forall n \geq 1$, $b_n \leq a_n$, que b et a sont respectivement croissante et décroissante, puis qu'elles convergent vers une même limite).

Exercice 3.13. Soit a_n une suite de réels positifs telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad a_0 = 0.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{np} \leq n a_p.$$

On rappelle que pour deux entiers naturels non nuls n et p quelconques, il existe deux entiers naturels q et r tels que $n = pq + r$ et $0 \leq r \leq p-1$.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists q \in \mathbb{N}, \quad \exists r \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad a_n \leq q a_p + a_r.$$

c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists r \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{a_r}{n}$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{\max\{a_0, \ldots, a_{p-1}\}}{n}.$$

d) Justifier que l'ensemble $\left\{\frac{a_k}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure qu'on notera λ.

Dans les deux questions qui suivent, ε désigne un réel strictement positif fixé.

e) Grâce à la caractérisation d'une borne inférieure, montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{a_p}{p} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}.$$

f) En déduire que, pour ce p, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \leq \frac{a_n}{n} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\max\{a_0, \ldots, a_{p-1}\}}{n}.$$

g) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{n} = \lambda$.

Exercice 3.14. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$U_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \; V_n = ne^{-n}, \; U_n = \frac{2^n - 3^{n+1}}{5^{2n}},$$

$$W_n = \ln\left(\frac{1+n}{n2}\right), \; T_n = \frac{n2 + (-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}.$$

Exercice 3.15. Soit U_n définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{5U_n+3}{U_n+3}$. En considérant la suite V_n définie par $V_n = \frac{U_n-3}{U_n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de (U_n). (Indication : calculer V_{n+1}.)

Exercice 3.16. Soit a un réel différent de 0 modulo π. On pose

$$p_n = \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \Pi_{i=1}^n \cos\frac{a}{2^i}.$$

Préciser la nature de (p_n) et l'exprimer en fonction de n. (Indication : utiliser la relation $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.)

Exercice 3.17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Montrer que U_n est convergente et calculer sa limite. (Indication : trouver un encadrement et utiliser le théorème des gendarmes.)

Exercice 3.18. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(nx)}{n}$. (Indication : utiliser $E(y) \leq x < E(y)+1$.)

Exercice 3.19. Soit $u_n = \cos\frac{1}{2} \times \cdots \times \cos\frac{1}{2^n}$. Etudier la convergence de cette suite et calculer la limite éventuelle. (Indication : utiliser la relation $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.)

Exercice 3.20. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les suites $U_0 = a$ et $U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$ $V_0 = b$ et $V_{n+1} = \sqrt{U_{n+1}V_n}$. Montrer que ces deux suites ont la même limite et la calculer en posant $cos\alpha = \frac{a}{b}$. (Indication : montrer par récurrence que $U_n \leq V_n$ puis que U_n est croissante V_n décroissante et qu'elles sont adjacentes. Montrer que $U_n = V_n \cos\frac{\alpha}{2^n}$.)

Exercice 3.21. Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge. (Indication : faire intervenir les suites extraites u_{6n} et u_{6n+3}.)

Exercice 3.22. Soit (u_n) une suite convergente vers l, on pose $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_0^n u_p$, montrer que v_n est convergente et a même limite l, (moyenne de Césaro). (Indication : traduire la convergence de la suite u_n vers l : $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ldots,$ * puis découper la somme qui définit v_n avec l'entier n_0 introduit dans la définition en deux sommes et étudier la limite de chaque somme.)

Exercice 3.23. Soit (u_n) une suite convergente vers l, on pose $v_n = \frac{\sum_0^n pu_p}{n2}$, montrer que v_n est convergente. (Indication : faire intervenir $w_n = \frac{2n}{n+1}v_n$; traduire que u_n tend vers l ce qui introduit un entier n_0 et calculer pour $n > n_0$ une majoration de $|w_n - l|$. En déduire la limite de v_n.)

Exercice 3.24. Soit (a_n) une suite et on suppose que $lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$; déterminer $lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}$ et $lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_1^n a_p}{n^2}$; on utilisera les deux exercices précédents. (Indication : poser $u_n = a_{n+1} - a_n$ et $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_0^n u_p$. Puis poser $v'_n = \frac{\sum_0^n pu_p}{n^2}$.)

Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 Le corps $\mathbb{C}$ des complexes

4.1.1 Definitions

Les nombres complexes sont par définition les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels on définit

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

On note aussi

$$-(x, y) = (-x, -y).$$

L'ensemble des nombres complexes (c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations) est noté $\mathbb{C}$. On va considérer les éléments de $\mathbb{C}$ comme des "nombres" z plutôt que comme des couples (x, y). On notera :

$$0 = (0, 0), 1 = (1, 0)$$

Comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a une structure de corps commutatif, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 4.1. *Si z, z', z'' sont trois nombres complexes, alors*

$$\begin{aligned}
&z + 0 = 0 + z = z \\
&z + z' = z' + z \\
&z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \\
&z + (-z) = (-z) + z = 0 \\
&z \times 1 = 1 \times z = z \\
&z \times z' = z' \times z \\
&(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'') \\
&z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z'' \\
&\textit{Si } z \neq 0, \textit{ alors il existe un unique nombre complexe, noté } \frac{1}{z}, \textit{ tel que } z \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times z = 1
\end{aligned}$$

Exercice. Si $z = (x, y)$, montrer que $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

On note

$$i = (0, 1),$$

et on a donc

$$i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

La multiplication et l'addition de $(x, 0)$ et $(x', 0)$ coïncident avec celles pour x et x', donc on peut identifier $\mathbb{R}$ avec l'ensemble des nombres réels de la forme $(x, 0)$, et on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Les nombres complexes de la forme $(0, y)$ sont les *imaginaires purs*. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

4.1.2 Forme algébrique des nombres complexes

Proposition 4.2 (Forme algébrique des nombres complexes)**.** *Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme*

$$z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On a $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0)$, d'où le résultat d'après les conventions de notation ci-dessus. □

On appelle z l'*affixe* du nombre complexe, x est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{R}e(z)$, et y est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{I}m(z)$.

Remarque.
$\mathrm{R}e(z)$ et $Im(z)$ sont des nombres réels.
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
La multiplication devient $z \times z' = (x + iy) \times (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$.

Le *conjugué* de $z = x + iy$ est $\overline{z} = x - iy$. On vérifie facilement que

$$\begin{aligned}
&\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\
&\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \\
&-\overline{z} = \overline{-z} \\
&\overline{z^n} = \overline{z}^n, n \in \mathbb{N} \\
&\overline{\overline{z}} = z \\
&\mathrm{R}e(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \\
&Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}
\end{aligned}$$

Le *module* de z est le réel positif noté $|z|$ et défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Si x est un réel, le module de x est la valeur absolue de x.

Attention ! On ne peut pas comparer deux nombres complexes avec $<, >, \leq, \geq$ (en particulier un nombre complexe n'est ni positif ni négatif). Mais on peut comparer le module de deux nombres complexes.

Lemme 4.3 (Inégalité triangulaire)**.** *1.* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,
2. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Exercice. Vérifier que

$$\begin{gathered}
z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\mathrm{R}e(z\overline{z}), \\
|z| \geq |\mathrm{R}e(z)| \geq \mathrm{R}e(z).
\end{gathered}$$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\
&= |z|^2 + 2\mathrm{R}e(z\overline{z'}) + |z'|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.
\end{aligned}$$

2. La preuve est la même que dans le cas réel (Exercice 1.2.2 page 11).

□

Exercice. Donner une interpretation géométrique de $\mathrm{R}e(z), Im(z), |z|, \overline{z}, z \mapsto z + a.x$.

4.1.3 Remarque sur les suites complexes

Une *suite complexe* est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'une suite complexe $(u_n)_n$ est *convergente* vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

l s'appelle la *limite* de la suite, et on note $u_n \to l$. La partie réelle et la partie imaginaire d'une suite complexe sont des suites réelles. On utilisera le résultat suivant.

Proposition 4.4. *Une suite complexe converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\left(Re(u_n)\right)_n$ converge vers $Re(l)$ et $\left(Im(u_n)\right)_n$ converge vers $Im(l)$.*

4.2 Exponentielle complexe

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Definition 4.5. *La* forme trigonométrique *d'un nombre complexe z est l'écriture de z sous la forme*

$$r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

*Si on introduit l'*exponentielle complexe

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{4.1}$$

la forme trigonométrique s'écrit aussi $z = re^{i\theta}$.

☞ **Remarque.** Deux complexes $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\alpha}$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On a aussi

$$\boxed{e^{i0} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$$

Exercice. Montrer que $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Exercice. Mettre $z = 2 + 2i$ sous forme trigonométrique.

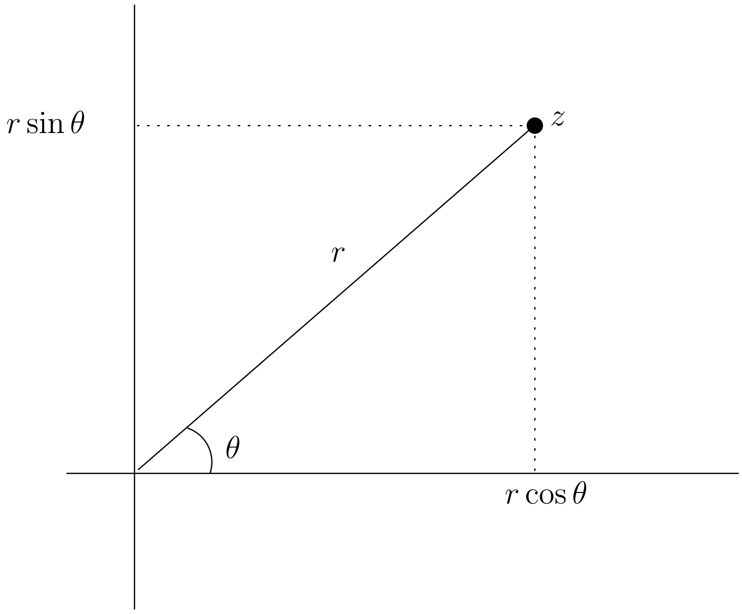
On obtient directement les *formules d'Euler* :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

Proposition 4.6. *Soit z un nombre complexe différent de 0. Alors il existe $r > 0$ (donc $r \in \mathbb{R}\ldots$) et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$z = re^{i\theta}. \tag{4.2}$$

Idée de démonstration. Un nombre complexe est un point du plan de coordonnées (x, y). Or tout point du plan est aussi uniquement défini par sa distance à l'origine (qui est le nombre r) et l'angle entre le demi-axe $0x$ et le vecteur $0z$. □



☞ **Remarque.** On a $r = |z|$.

Lemme 4.7. *1.* $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ *2.* $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$

Démonstration. 1. Utiliser (4.1) et identifier $\cos(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi)$.

2. On a vu que $\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$, donc $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta}e^{-i\varphi}$ et il ne reste plus qu'à utiliser le résultat ci-dessus. □

☞ **Remarque.** On appelle le θ dans l'écriture (4.2) l'*argument* de z, et on le note $arg(z)$. L'argument d'un nombre complexe n'est pas unique : pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i\theta} = 1 \times e^{i\theta} = e^{2k\pi i}e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}.$$

Par exemple, $i = e^{i\pi/2} = e^{-i3\pi/2}$.

Dans le plan, un nombre complexe z est situé sur la droite passant par 0 de coefficient directeur $\frac{Im(z)}{Re(z)}$, et ce nombre est aussi la tangente de θ, l'argument de z. Donc tout nombre complexe z non nul admet un unique argument, $arg(z)$, dans l'intervalle $]-\pi,\pi)$, et qui vérifie

$$\tan(arg(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}.$$

Cet argument est l'*argument principal* de z.

Proposition 4.8. *On a la* formule de Moivre *: pour $n \in \mathbb{Z}$*

$$\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$$

qui s'écrit aussi

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Démonstration. Récurrence sur n en utilisant le lemme précédant. □

4.2.1 Exponentielle d'un nombre complexe

Si $z = x + iz$ est un nombre complexe, on définit

$$e^z = e^x e^{iz}.$$

La première exponentielle est l'exponentielle usuelle (voir page 50), la seconde est l'exponentielle complexe introduite dans la définition 4.5.

Exercice. Pour z, z' deux nombres complexes, montrer que

1. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
2. $(e^z)^n = e^{nz}$
3. $|e^z| = e^{\mathrm{R}e(z)}$
4. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

☞ **Remarque.** On a défini l'exponentielle complexe à l'aide de cos et sin, qui peuvent être définies de façon géométrique. De même les identités pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ peuvent Ãªtre montrées de façon géométrique, et on peut retrouver toutes les formules à partir de celles-ci.

Il existe une définition de l'exponentielle complexe sous la forme de "série entière" :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

qui sera étudiée dans un cours d'analyse plus avancé. La cosinus et le sinus sont alors définis à partir comme la partie réelle et la partie imaginaire de l'exponentielle complexe.

4.2.2 Linéarisation et opération inverse

Donnons deux applications :

– Linéarisation : il s'agit d'écrire $\cos^n(\theta)$ ou $\sin^p(\theta)$ en fonction de $\sin(n\theta)$ et $\cos(p\theta)$ en utilisant la formule d'Euler et la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Il s'agit ensuite de rassembler les termes des extremités de même puissance.

♢ **Exemple.**

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3) \\
&= \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{8}\cos(\theta).
\end{aligned}$$

– Opération inverse : exprimer $\cos(n\theta)$, $\sin(p\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. On utilise la formule de Moivre.

♢ **Exemple.**

$$\cos 3\theta = \mathrm{R}e((\cos\theta + i\sin\theta)^3) = \cos(3\theta) - 3\cos(\theta)\sin(2\theta).$$

4.3 Équations à coefficients complexes

4.3.1 Racine n-ième d'un nombre complexe

Definition 4.9. *Soit $Z \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes z tels que $z^n = Z$ sont appelés* racines n-ièmes *de Z.*

Pour les calculer, la méthode consiste à écrire Z sous forme trigonométrique $Z = Re^{i\theta}$, on cherche alors $z = re^{i\alpha}$ solution de

$$(re^{i\alpha})^n = Re^{i\theta}$$

ce qui est équivalent d'après la formule de Moivre à :

$$r = R^{\frac{1}{n}} \text{ et } n\alpha = \theta + 2k\pi.$$

Ainsi, on a

$$r = R^{\frac{1}{n}} \text{ et } \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \forall k = 0, n-1$$

(pour $k = n$ on retrouve le même résultat que pour $k = 0$, pour $k = n + 1$ le même que pour $k = 1$).

Definition 4.10. *Les* racines n-ièmes de l'unité *sont les nombres complexes tels que* $z^n = 1$.

On pose $z = re^{i\alpha}$, d'où $(re^{i\alpha})^n = e^{i2\pi}$, soit $r = 1$ et $\alpha = \frac{2k\pi}{n}, \forall k = 0, n-1$. Donc les racines n-ièmes de l'unité sont les n complexes

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

et géométriquement ce sont les sommets du polygone régulier à n côtés sur le cercle trigonométrique. Par exemple les racines cubiques sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, j^2 et $\bar{j}$.

La somme des n racines n-ièmes de l'unité vaut 0 car $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} = 0$ avec $z = e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$.

Exercice. Résoudre $z^3 = 4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$.

4.3.2 Calcul des racines carrées d'un complexe

Soit $Z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}2$, on cherche z tel que $z^2 = Z$. On écrit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors le système à résoudre

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Attention ! Si z est une racine carrée de Z alors la deuxième est $-z$! Dans le cas réel on appelle *la* racine carrée celle qui est positive. Dans le cas complexe, c'est impossible de faire un tel choix (pourquoi ?). En particulier, on ne note **jamais** $\sqrt{z}$.

Exercice.

1. Calculer les racines carrées de i.
2. Calculer les racines carrées de $Z = -3 + 4i$.

4.3.3 Equation du second degré

On veut calculer les solutions de $az^2 + bz + c = 0$. On calcule le discriminant qui est le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ puis une racine carrée δ de Δ ($\delta^2 = \Delta$). Les solutions sont alors

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \; z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Attention ! Δ est un nombre complexe, donc il n'a pas de signe !

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

4.3.4 Théorème fondamental de l'algèbre

On admet de résultat suivant

Théorème 4.11. *Tout polynôme à coefficients complexes de degré* ≥ 1 *admet une racine complexe.*

Cet énoncé signifie qu'une équation de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

admet toujours une solution complexe. C'est faux si on reste dans les réels : $z^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution réelle. On a vu que le théorème est vrai pour les polynômes de degré 2.

Corollaire 4.12. *Si P est un polynôme complexe de degré $n \geq 1$, alors il s'écrit*

$$a_n \Pi_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

où les z_k sont les solutions de P.

4.4 Exercices

Exercice 4.1.

a) Montrer que $A = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$ est réel.

b) On donne $z = 3 - 2i$. Déterminer les parties réelle et imaginaire de l'inverse de z.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $(1 + 2i)z - 3 + 5i = 0$, $2z + 3\overline{z} = 5$, $\overline{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 4.2.

a) Calculer le module et l'argument de $1 + i\sqrt{3}$, $2i(1 + i)(1 + i\sqrt{3})$, $\frac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$.

b) Calculer $(\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{2010}$.

c) Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. En déduire z^6.

d) Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = 1/z$.

Exercice 4.3. Calculer les racines sixièmes de l'unité.

Exercice 4.4. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$ie^{i\theta}, \;\; 1 + e^{i\theta}, \;\; e^{i\theta} + e^{i\alpha}, \;\; (\theta, \, \alpha \in [0, 2\pi]).$$

Exercice 4.5. Montrer que $(-1 + i)^{10} = -32i$.

Exercice 4.6. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C}; \, |z| = 3\}$.

b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C}; arg(z) = \pi/4 + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C}; \; z - \overline{z} = 2\}$.

d) $A_4 = \{z \in \mathbb{C}; \; \frac{|z-1|}{|z-i|} = 1\}$.

e) $A_5 = \{z \in \mathbb{C}; \; z + \overline{z} = 2|z - 1|\}$.

Exercice 4.7.

a) Calculer les racines carrés de -7, $8i$, $-2i$, $1 - i$, $-3 + 4i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

i) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

ii) $z^2 + (4 - 6i)z - 5 - 14i = 0$.

iii) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

iv) $z^{2n} - (2\cos(\phi))z^n + 1 = 0$, $(\phi \in \mathbb{R}, \, n \in \mathbb{N})$.

c) Montrer que l'équation (E)

$$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0$$

admet une solution réelle et une solution imaginaire pur, puis résoudre (E). Montrer que les points dont les affixes sont les solutions de (E) sont alignés.

d) Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué.

e) Déterminer les nombres complexes non nuls z tel que z, $1/z$ et $1 - z$ aient le même module.

Exercice 4.8.

a) Soit z un nombre complexe. Notons A, B et C les points du plan d'affixes respectives z, z^2 et z^3. Quel est l'ensemble des points A tel que le triangle soit rectangle en A.

b) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que M soit aligné avec les points d'affixes i et iz. Déterminer le lieu des points B d'affixe iz correspondant.

Exercice 4.9.

a) Exprimer en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(3\theta), \sin(6\theta).$$

b) Linéariser

$$\cos^2\theta, \sin^3\theta, \sin^4\theta, (\sin^2\theta)(cos^3\theta).$$

Exercice 4.10. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
a) Calculer les modules et arguments de z_1 et z_2.
b) Donner la forme algébrique et trigonométrique de $z_1 z_2$.
c) En déduire les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 4.11. Calculer les racines 4-ièmes de -1 et les racines 5-ièmes de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 4.12. Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1 et $S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.
a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$.
b) En déduire que $S = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k$.
c) Calculer ωS, en déduire la valeur de S.

Exercice 4.13.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions dans le plan complexe.
On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
b) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.
c) Vérifier que

$$u + u4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),$$

$$u2 + u3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

d) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, puis calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Partie II. Fonctions d’une variable réelle

Chapitre 5

Limite et continuité

5.1 Généralités sur les fonctions

Nous savons qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas forcement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier mais sur un sous ensemble appelé domaine de définition noté parfois D_f. Par exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Si f et g sont deux fonctions de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir de nouvelles fonctions :

- $f + g$ est la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- fg est la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

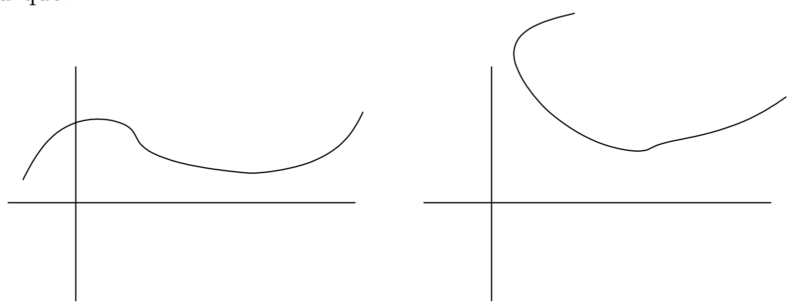
On peut aussi comparer f et g :

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \leq g(x).$$

Definition 5.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Le* graphe *de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\, x \in D_f ; y = f(x)\}.$$

Exercice. Un des deux graphe ci-dessous n'est pas le graphe d'une fonction. Lequel ? Pourquoi ?



Une fonction f est dite

- *croissante* si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f, x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$,
- *strictement croissante* si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$,
- *décroissante* si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f, x \geq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$,
- *strictement décroissante* si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$,
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante,
- *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante,
- *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, f(x) \leq M$,
- *minorée* si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, f(x) \geq m$,
- *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, |f(x)| \leq K$.

On dit aussi que

- f admet un *minimum* si $\exists x_1 \in D_f \forall x \in D_f, f(x_1) \leq f(x)$. on note alors $\underset{x \in D_f}{min} f$ pour $f(x_1)$,
- f admet un *maximum* si $\exists x_2 \in D_f \forall x \in D_f, f(x_2) \geq f(x)$. on note alors $\underset{x \in D_f}{max} f$ pour $f(x_2)$,
- f admet un *extremum* si f admet un maximum ou un minimum.

Exercice. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. "la fonction f s'annule"
2. "f est la fonction nulle"
3. "f n'est pas constante"
4. "f ne prend jamais deux fois la même valeur"
5. "la fonction f présente un minimum"
6. "f prend des valeurs arbitrairement grandes" ou "f n'est pas majorée"
7. "f ne peut s'annuler qu'une seule fois"

5.1.1 Composition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I' \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $I, I' \subset \mathbb{R}$. Si $f(I) \subset I'$, alors on peut composer f et g, c'est-à-dire qu'on définit une nouvelle fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

5.1.2 Parité

Soit une fonction $fI \to \mathbb{R}$ telle que $I \subset \mathbb{R}$ soit symétrique par rapport à 0 : $x \in I \Rightarrow -x \in I$. Alors on dit que

- f est *paire* si $f(x) = f(-x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est *impaire* si $f(x) = -f(-x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine.

Exercice. Donner des exemples de fonctions paires et impaires.

5.1.3 Fonctions usuelles

Valeur absolue et partie entière

On a déjà rencontré ces deux fonctions. La *partie entière* est l'application

$$E : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\} \end{array}.$$

La partie entière de x peut aussi être définie en disant que c'est l'unique entier relatif qui vérifie $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

La *valeur absolue* été étudiée dans la partie 1.2, voire page 11.

$$|.| : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto |x| = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array}.$$

Exercice. Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles bornées ? majorées ? minorées ? paires ? impaires ? croissantes ? décroissantes ? Dessiner leur graphe.

Logarithme et exponentielle

La fonction *logarithme*, notée $\ln(.)$ est une fontion de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Elle est définie comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1 (résultat admis dans ce cours). On a les propriétés suivantes, pour $x, y > 0$:

- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$,
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.

La fonction *exponentielle*, notée exp(.) est définie comme l'inverse du logarithme : c'est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie

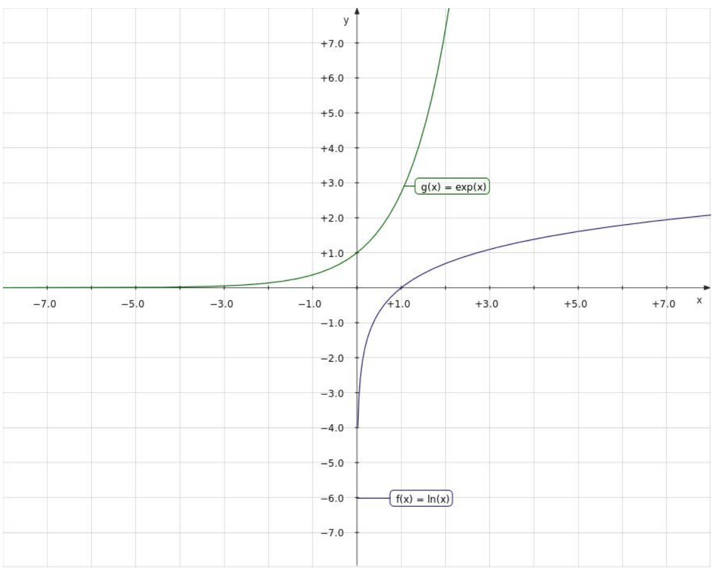
$$\ln(\exp(x)) = x, \exp(\ln(x)) = x.$$

On utilise la notation e^x pour $\exp(x)$.

On a les propriétés suivantes

- $e^0 = 1$,
- $e^{x+y} = e^x e^y$,
- $e^{x-y} = e^x / e^y$,
- $e^{nx} = (e^x)^n$.

☠ **Attention !** Ne pas confondre cette fonction avec l'exponentielle complexe introduite dans la section 4.2.



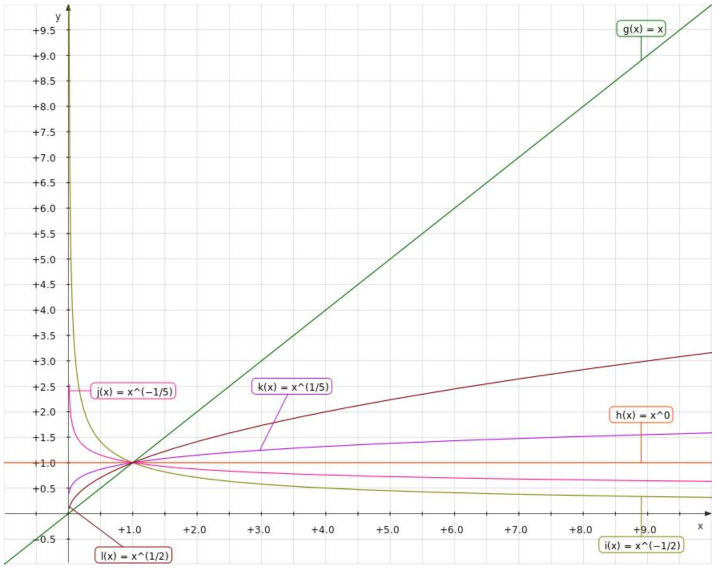
Fonctions puissance

Pour un $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction suivante

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto e^{a\ln(x)} \end{array}.$$

On utilise la notation x^a pour $e^{a\ln(x)}$. On a les propriétés suivantes

- $x^0 = 1$, $x^1 = x$,
- $1^a = 1$,
- $x^a y^a = (xy)^a$,
- $x^a x^b = x^{a+b}$,
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $\ln(x^a) = a\ln(x)$.



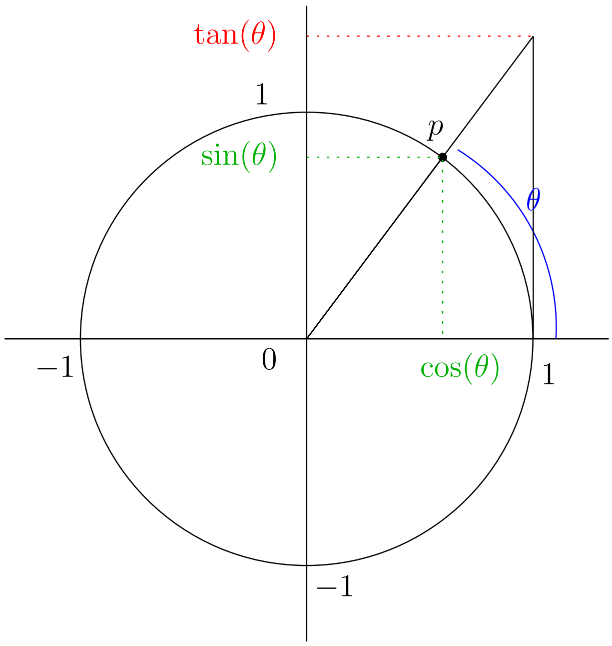
Fonctions trigonométriques circulaires

Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, le cosinus et le sinus sont définis respectivement comme l'abscisse et l'ordonnée de l'unique point p sur le cercle unité centré en l'origine qui est tel que l'angle entre $0p$ et l'axe des abscisses est égal à θ. Le cosinus et le sinus sont étendus à tout $\mathbb{R}$ par périodicité :

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta), \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta), k \in \mathbb{Z}.$$

Ce sont alors des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

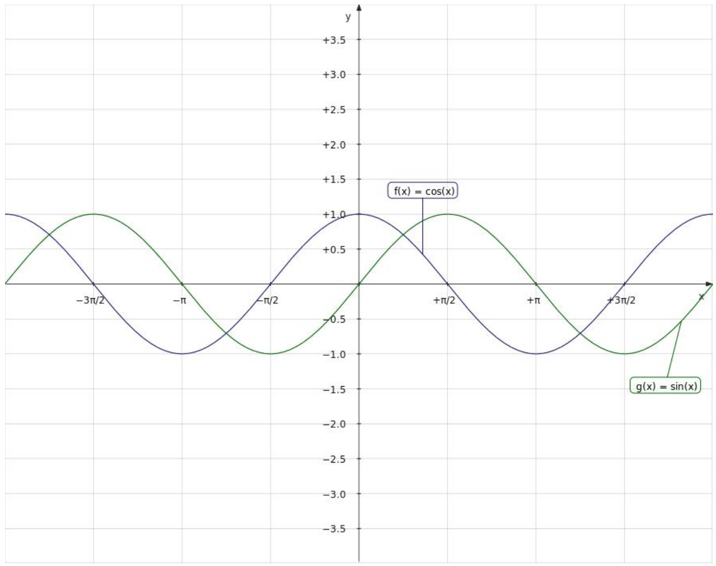
La tangente est la fonction de $] - \pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ définie comme le rapport du sinus sur le cosinus. Consulter l'annexe C page 91 pour certaines propriétés de ces fonctions.

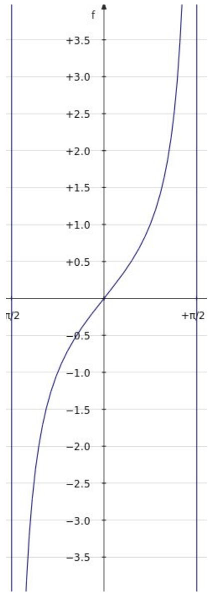


Fonctions trigonométriques hyperboliques

Le *cosinus hyperbolique* est la fonction suivante :

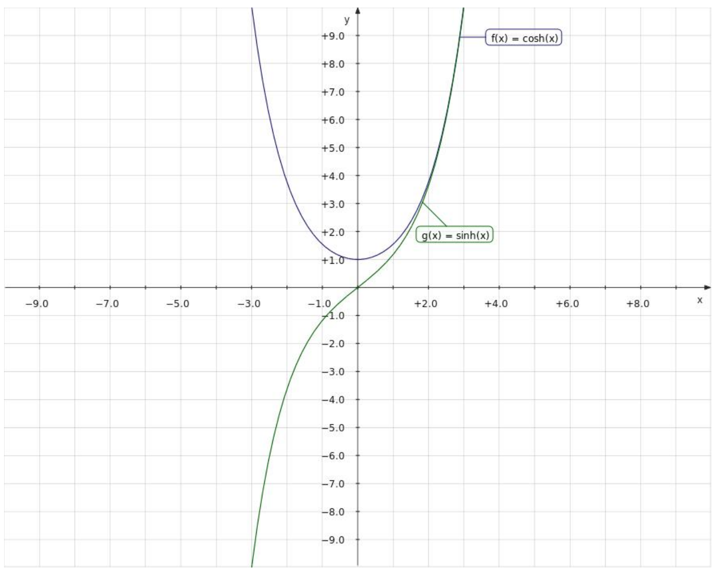
$$\cosh : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \end{array},$$





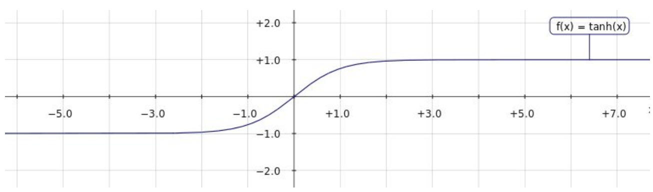
le *sinus hyperbolique* est

$$\sinh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \end{array},$$



et la *tangente hyperbolique* est

$$\tanh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{array}.$$



Exercice. Montrer que

1. $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$
2. $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
3. $\tanh(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
4. $-1 \leq \tanh(x) \leq 1$

☞ **Remarque.** L'ensemble des (x, y) du plan tels que $x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole, d'où le nom de trigonométrie hyperbolique, puisque cosh et sinh vérifient cette équation. De manière analogue, cos et sin vérifient $x^2 + y^2 = 1$, qui est l'équation d'un cercle, d'où le nom de trigonométrie circulaire.

Exercice. Montrer que

- $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$,
- $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$,
- $\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a) = \frac{1+\tanh^2(a)}{1-t\tanh^2(a)}$,
- $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a) = \frac{2\tanh(a)}{1-\tanh^2(a)}$,
- $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$,
- $\tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1+\tanh^2(a)}$,
- $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$,
- $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\sinh(\frac{a-b}{2})$,
- $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$,
- $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a-b}{2})\cosh(\frac{a+b}{2})$.

5.2 Limites en un point et aux infinis

5.2.1 Définitions

Definition 5.2. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Un* voisinage *de a est un intervalle ouvert contenant a. Un* voisinage épointé *de a est un voisinage de a auquel on a retiré le point a.*

Par exemple, $]-1, 0[\cup]0, 1/2[$ et $\mathbb{R}^*$ sont des voisinages épointés de 0.
Soit l et a deux réels et $f : V \to \mathbb{R}$. On a les cas où f admet une limite finie :

- Si V est un voisinage épointé de a, on dit que f *admet l pour limite en a*, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in V, (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).}$$

- On dit que f *admet l pour limite en $+\infty$*, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in V, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

- On dit que f *admet l pour limite en $-\infty$*, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in V, (x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Exercice. Écrire la négation de "f admet l pour limite en a" et illustrer cette phrase par un dessin.

Il y a aussi les cas où f admet une limite infinie :

- On dit que f *admet $+\infty$ pour limite en a*, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R}, \forall x \in V, (|x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A).$$

- Si V est non majoré, on dit que f *admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$*, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists A' \in \mathbb{R}, \forall x \in V, (x \geq A' \Rightarrow f(x) \geq A).$$

- Si V est non minoré, on dit que f *admet* $+\infty$ *pour limite en* $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, si

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists B'\in\mathbb{R}, \forall x\in V, (x\le B'\Rightarrow f(x)\ge A).$$

- On dit que f admet $-\infty$ pour limite si $-f$ admet $+\infty$ pour limite.

Proposition 5.3. *Si f admet l et l' pour limites en a alors $l=l'$.*

☞ **Remarque.** La démonstration est la même que dans le cas des suites (proposition 3.5 page 28). On remarque que la notion de voisinage pour les fonctions joue un rôle analogue à celui de "à partir d'un certain rang" pour les suites.

Proposition 5.4. *Si $f:V\to\mathbb{R}$ admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.*
Si f admet une limite en $+\infty$, alors f est majorée.

"f bornée au voisinage de a" signifie qu'il existe un voisinage épointé V de a tel que la restriction de f à V est une fonction bornée.

Ici aussi, la preuve est similaire à celle pour les suites (proposition 3.7 page 29).

5.2.2 Composition de limites

Proposition 5.5. *Pour $V,J\subset\mathbb{R}$, soit $f:V\to J$, $g:J\to\mathbb{R}$ et $f(V)\subset J$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=l$. Alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=l$.*

Démonstration. Les hypothèses sur les limites de f et g s'écrivent

$$\forall\varepsilon>0, \exists\eta\in\mathbb{R}, \forall x\in V, (|x-a|\le\eta\Rightarrow|f(x)-b|\le\varepsilon), \tag{5.1}$$
$$\forall\varepsilon'>0, \exists\eta'\in\mathbb{R}, \forall y\in J, (|y-b|\le\eta'\Rightarrow|g(y)-l|\le\varepsilon'). \tag{5.2}$$

En prenant $\epsilon=\eta'$, et en notant que pour tout y dans la seconde équation il existe x tel que $y=f(x)$, on obtient le résultat demandé :

$$\forall\varepsilon'>0, \exists\eta\in\mathbb{R}, \forall x\in V, (|x-a|\le\eta \overset{(5.1)}{\Rightarrow} |f(x)-b|\le\varepsilon=\eta' \overset{(5.2)}{\Rightarrow} |g(f(x))-l|\le\epsilon').$$

□

5.2.3 Opérations algébriques pour les fonctions admettant une limite finie

Les énoncés et les preuves sont similaires à ceux pour les suites.

Proposition 5.6. *Soit $a\in\mathbb{R}$ et V un voisinage épointé de a, $f,g:V\to\mathbb{R}$, $(l,l')\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.*

1. *Si $f(x)\to l$ quand $x\to a$ alors $|f(x)|\to|l|$ quand $x\to a$.*
2. *$f(x)\to 0$ quand $x\to a \Longleftrightarrow |f(x)|\to 0$ quand $x\to a$.*
3. $$\left\{\begin{array}{l} f(x)\to l \text{ quand } x\to a\\ g(x)\to l' \text{ quand } x\to a\end{array}\right. \Longrightarrow f(x)+g(x)\to l+l' \text{ quand } x\to a$$
4. *Si $f(x)\to l$ quand $x\to a$ alors $\lambda f(x)\to\lambda l$ quand $x\to a$.*
5. $$\left\{\begin{array}{l} f(x)\to l \text{ quand } x\to a\\ g(x)\to l' \text{ quand } x\to a\end{array}\right. \Longrightarrow f(x)g(x)\to ll' \text{ quand } x\to a$$
6. *Si $g(x)\to l'$, $l'\neq 0$, quand $x\to a$ alors $\frac{1}{g}\to\frac{1}{l'}$ quand $x\to a$.*
7. $$\left\{\begin{array}{l} f(x)\to l \text{ quand } x\to a\\ g(x)\to l', l'\neq 0, \text{ quand } x\to a\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{f}{g}\to\frac{l}{l'} \text{ quand } x\to a$$

Proposition 5.7. *Les résultats de la proposition précédente restent vrais si a est remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$.*

Exercice. Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, et $l,l'\in\mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to 0}=l'$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\max(f(x),g(x))=\max(l,l')$.

5.2.4 Opérations algébriques pour les fonctions admettant une limite infinie

Proposition 5.8. *1. Si $f(x) \to +\infty$ quand $x \to a$ et si g est minorée au voisinage de a alors $f+g \to +\infty$ quand $x \to a$.*
En particulier,

$$\begin{cases} f \to +\infty \\ g \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow f+g \to +\infty.$$

$$\begin{cases} f \to +\infty \\ g \to l \end{cases} \Longrightarrow f+g \to +\infty.$$

2. Si $f(x) \to +\infty$ quand $x \to a$ et si g est minorée au voisinage de a par une constante > 0 alors $fg \to +\infty$ quand $x \to a$.
En particulier,

$$\begin{cases} f \to +\infty \\ g \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow fg \to +\infty.$$

$$\begin{cases} f \to +\infty \\ g \to l > 0 \end{cases} \Longrightarrow fg \to +\infty.$$

5.2.5 Ordre et limite

Proposition 5.9. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et V un voisinage épointé de a, $f : V \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f admet l pour limite en a.*

1. *i) Si $c < l$ alors au voisinage de a, $c < f(x)$.*
   ii) Si $l < d$ alors au voisinage de a, $f(x) < d$.
   iii) Si $c < l < d$ alors au voisinage de a, $c < f(x) < d$.
2. *i) Si $c \leq f(x)$ au voisinage de a alors $c \leq l$.*
   ii) Si $f(x) \leq d$ au voisinage de a alors $l \leq d$.
   iii) Si $c < f(x) < d$ au voisinage de a alors $c \leq l \leq d$.

Démonstration. 1. i) Puisque $f(x) \to l$ et que $l - c > 0$, $\exists \eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in V$, $|x-a| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq 1/2(l-c) < l - c \Rightarrow f(x) > c$.
ii) Puisque $f(x) \to l$ et que $d - l > 0$, $\exists \eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in V$, $|x - a| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l| \leq 1/2(d-l) < d - l \Rightarrow f(x) < d$.
iii) Prendre $\eta = min(\eta_1, \eta_2)$.
2. i) Au voisinage de a, on a pour $\epsilon > 0$ $|f(x) - l| < \epsilon$, ce qui donne $c \leq f(x) \leq l + \epsilon$.
ii), iii) Comme i).

□

Proposition 5.10. *Les résultats de la proposition ci-dessus restent vrais si $a = +\infty$ ou $-\infty$.*

☠ **Attention !** Ne pas mélanger $>$ et $\geq$!
Par exemple, on a pas $c \leq l \Rightarrow c \leq f(x)$ au voisinage de a, car on a pas $c = l \Rightarrow f(x)$ au voisinage de a.
De même, on a pas $c < f(x) \Rightarrow c < l$ au voisinage de a (prendre $c = l$).

Corollaire 5.11. *Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.*

☠ **Attention !** On a **pas** ($f(x) < g(x)$ au voisinage de a) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

On résume souvent la situation en disant que “par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges”.

Théorème 5.12. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et V un voisinage épointé de a, $f, g, h : V \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{cases} f(x) \to l \text{ quand } x \to a \\ h(x) \to l \text{ quand } x \to a \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } a \end{cases} \Longrightarrow g(x) \to l \text{ quand } x \to a.$$

De plus, le résultat est toujours vrai si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Démonstration. Conséquence des résultats précédents. □

Exercice. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{E(1/x)+x}{E(1/x)-x}$.

5.2.6 Limites à droite et à gauche

- On dit que f *admet* l *comme limite à droite en* a, et on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$, ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=l$, si

$$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0,\ \forall x\in V, (0<x-a\leq\eta \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon).$$

- On dit que f *admet* l *comme limite à droite en* a, et on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$, ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=l$, si

$$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0,\ \forall x\in V, (-\eta\leq x-a<0 \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon).$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to a^+} f(x)=l \text{ et } \lim_{x\to a^-} f(x)=l\right).$$

En particulier, si une fonction f admet des limites différentes à gauche et à droite en a, alors f n'a pas de limite en a.

Exercice. Calculer les limites à gauche et à droite en 0 de $x\to\dfrac{1}{x}$.

5.2.7 Étude de limite pour une fonction monotone

Théorème 5.13. *Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})^2$, tel que $a<b$ et $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.*

1. *Si f est majorée alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f=\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.*
2. *Si f n'est pas majorée alors f admet $+\infty$ pour limite en b.*

Démonstration.

1. On suppose $b\in\mathbb{R}$. $f(]a,b[)$ est un ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré. Donc il admet une borne supérieure l dans $\mathbb{R}$.
   Soit $\varepsilon>0$, $l-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(]a,b[)$ dans $\mathbb{R}$, donc il existe $y\in f(]a,b[)$ tel que $l-\varepsilon<y\leq l$. Puis il existe $\xi\in]a,b[$ tel que $y=f(\xi)$. On a donc $l-\varepsilon<f(\xi)\leq l$. $\forall x\in]a,b[$ tel que $x\geq\xi$, comme f est croissante $f(x)\geq f(\xi)$ donc $l-\varepsilon<f(x)\leq l$. En notant $\eta=b-\xi$, on a $\forall x\in]a,b[$ tel que $0<b-x\leq\eta\Rightarrow|f(x)-l|\leq\varepsilon$.
2. Soit $A\in\mathbb{R}$ et f non majorée. Donc il existe $\xi\in]a,b[$ tel que $f(\xi)\geq A$. Comme f est croissante, $\forall x\in]a,b[$, $\xi\leq x$, on a $f(\xi)\leq f(x)\Rightarrow f(x)\geq A$.

□

Proposition 5.14. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ croissante. Alors f admet en tout point de $]a,b[$ une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\leq f(a)\leq\lim\limits_{x\to x_0^+} f$.*

Démonstration. La fonction f est croissante et majorée par $f(x_0)$ sur $[a,b]\cap]-\infty,x_0[$. D'après le théorème précédent, f a une limite à gauche en x_0 qui est $\sup_{x\in[a,b]\cap]-\infty,x_0[} f(x)$. On montre que si f est croissante et minorée par $f(x_0)$ sur $[a,b]\cap]x_0,+\infty[$ alors f a une limite à droite en x_0 qui vaut $\inf_{x\in[a,b]\cap]x_0,+\infty[} f(x)$. □

5.2.8 Limites usuelles

Fractions de polynômes

Pour $n,m\in\mathbb{N}$, $0\leq n\leq m$, $0\leq p\leq q$, $a_m\neq 0, a_n\neq 0, b_p\neq 0, b_q\neq 0$, on considère

$$f(x)=\frac{a_nx^n+\cdots+a_mx^m}{b_px^p+\cdots+b_qx^q}.$$

Alors

- les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ sont celles de $\dfrac{a_m x^m}{b_q x^q}$ (les plus grandes puissances). Pour le voir il suffit de mettre $\dfrac{a_m x^m}{b_q x^q}$ en facteur dans l'expression de f et d'utiliser le résultat sur les compositions de limites (proposition 5.5 page 55).
- la limite de f en 0 est celle de $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$ (les plus petite puissances). L'argument est analogue à celui d'au-dessus.

Logarithme et exponentielle

Dans ce cours, on admet les résultats suivants :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- En $+\infty$, l'exponentielle est "plus forte" que n'importe quelle puissance, c'est-à-dire, pour $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

- En $+\infty$, n'importe quelle puissance positive de x est "plus forte" que le logarithme, c'est-à-dire, pour $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^\alpha} = 0, \ \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0,$$

en particulier

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \ \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0}.$$

- Avec le chapitre sur les dérivées, on verra :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Sinus et cosinus

Proposition 5.15. *1.* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1}$, *2.* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}}$.

Démonstration. 1. Prenons d'abord $x \in]0, \pi/2[$. Soit O l'origine, P le point $(1,0)$, M le point sur le cercle unité correspondant à l'angle x, et I l'intersection de OM avec la droite verticale passant par P. On a clairement que le triangle OPM est strictement inclus dans le secteur angulaire OPM qui est lui-même strictement inclus dans le triangle OPI. En calculant les aires correspondantes (aire d'un triangle = la moitié de la base × la hauteur, aire d'un secteur angulaire sur le disque unité = la moitié de l'angle×), on obtient

$$\boxed{\sin(x) < x < \tan(x)}$$

ce qui donne en particulier

$$\boxed{\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1}$$

Comme $\cos(0) = 1$, par le théorème d'encadrement (théroème 5.12 page 56), on obtient que la limite à droite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0 est 1. De plus cette fonction est paire sur $\mathbb{R}^*$, donc sa limite à droite en 0 est égale à sa limite à gauche en 0, donc sa limite en 0 est 1.

2. Conséquence de 1) en écrivant

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{(1-\cos^2(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= \frac{1}{1+\cos(x)} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2.$$

□

♢ **Exemple.** Pour calculer la limite en 0 de $\frac{\sin(3x)}{x}$, on écrit $\frac{\sin(3x)}{x} = 3\frac{\sin(3x)}{3x}$. Le résultat sur les compositions de limites (proposition 5.5 page 55) et la proposition précédente donnent que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$, d'où $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$

5.3 Fonctions continues

5.3.1 Continuité en un point

Definition 5.16. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est* continue en a *si f est définie en a et f admet une limite finie en a qui vaut $f(a)$:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exercice. Donner des exemples de fonctions non continues en 0.

Le résultat sur les limites indique que

Proposition 5.17. *Si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a.*

On dit que f est *continue à droite en a* si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, et f est *continue à gauche en a* si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$. Bien sûr, f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Les deux propositions suivantes sont des conséquences immédiates des résultats analogues sur les limites.

Proposition 5.18. *Soit $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue en a, alors $|f|$ est continue en a.*
2. *Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.*
3. *Si f est continue en a, alors λf est continue en a.*
4. *Si f et g sont continues en a, alors fg est continue en a.*
5. *Si g est continue en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est continue en a.*
6. *Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

Proposition 5.19. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, avec $f(I) \subset J$. Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

5.3.2 Continuité sur un intervalle

Definition 5.20. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* continue sur I *si f est continue en tout point de I.*

Exercice. Montrer que les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les propriétés de continuité en un point s'étendent immédiatement à la continuité sur un intervalle.

Proposition 5.21. *Soit $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.*
2. *Si f et g sont continues sur I alors $f + g$ est continue sur I .*
3. *Si f est continue sur I alors λf est continue sur I .*
4. *Si f et g sont continues sur I alors fg est continue sur I .*
5. *Si g est continue sur I et $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est continue sur I .*
6. *Si f et g sont continues sur I et $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*

Proposition 5.22. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*

5.3.3 Continuité sur un intervalle fermé

Une application est continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Exercice. Soit E la fonction partie entière.

1. En quels points E est continue ?
2. En quels points E est continue à droite ?
3. E est-elle continue sur $[0, 1],]0, 1[, [0, 1[,]0, 1]$?

5.3.4 Prolongement par continuité

Soit I un voisinage épointé de a et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On dit que f est *prolongeable par continuité en a* si f admet une limite finie l en a. On définit alors le prolongement par continuité de f, qui est une fonction notée $\tilde{f}$ et définie par

$$\tilde{f} : \begin{array}{ll} I \cup \{a\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} .$$

En particulier, $\tilde{f}$ est continue en a.

Exercice. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

5.3.5 Continuité et suites

Proposition 5.23. *Soit I un intervalle et $a \in I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si pour **toute** suite x qui converge vers a, la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) f admet l pour limite en a : soit $\varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, x \neq a, |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$. Soit (u_n) un suite tendant vers a, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |u_n - a| \leq \eta$. Ainsi $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |f(u_n) - l| \leq \varepsilon$ ce qui signifie que la suite $f(u_n)$ tend vers l.

($\Leftarrow$) Montrons la contraposée et supposons que f n'admette pas l comme limite en a :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, \begin{cases} |x-a| \leq \eta, \\ |f(x) - l| > \varepsilon. \end{cases}$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, en remplacant $\eta = \frac{1}{n}$, il existe $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - l| > \varepsilon$ c'est à dire que l'on a construit une suite (u_n) qui tend vers a et telle que la suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers l. □

☞ **Remarque.** Pour montrer que f n'est **pas** continue en a, il suffit de trouver **une** suite x qui tend vers a et telle que la suite de terme général $f(x_n)$ ne tende pas vers $f(a)$.

☞ **Remarque.** L'exercice de la page 28 montre la continuité de la fonction racine carrée.

Exercice.

1. Soit $f(x) = \sin(x)$. Determiner deux suites u et v tendant vers $+\infty$ et telles que $f(u_n) \to 0$ et $f(v_n) \to 1$. f admet-elle une limite finie quand $x \to +\infty$?
2. Quelles sont les fonctions périodiques admettant une limite finie en $+\infty$?

(une fontion périodique de période T vérifie $f(T + x) = f(x)$.)

Exercice. Montrer que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \cos(\ln(x))$ n'a pas de limite en $+\infty$ en utilisant les deux suites de terme général $x_n = e^{2n\pi}$ et $y_n = e^{2n\pi+\pi/2}$.

5.3.6 Suites récurrentes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue de I dans I et on considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **limites éventuelles :** si u_n converge vers l, comme f est continue à partir de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $l = f(l)$. Les limites eventuelles s'obtiennent en résolvant l'équation $f(x) = x$.
- si f est croissante, u_n est **monotone** (par récurrence) : si $u_0 \leq u_1$ la suite est croissante sinon elle est décroissante.

  ♢ **Exemple.**

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n}. \end{cases}$$

  Ici, on a $f(x) = \sqrt{4+x}$. et on remarque que $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (par récurrence sur n). Les limites éventuelles sont les solutions positives de $\sqrt{4+x} = x$ soit $l = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. f est croissante donc u_n est monotone. En outre $u_1 - u_0 > 0$ donc u_n est croissante.

  Montrons par récurrence que u_n est majorée par l.

  Pour $n = 0$ c'est vrai car $u_0 = 0 < l$. Supposons la propriété vraie pour un certain n. Or $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(l)$ car f est croissante et $u_n \leq l$ par hypothèse. Comme $f(l) = l$, on a le résultat voulu.

  Donc u_n est croissante majorée par l donc elle est convergente. La seule valeur possible pour la limite est l donc $u_n \to l$.

- • Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to I$ une fonction continue. La suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente si u_0 est donné et $u_{n+1} = f(u_n)$.
- • Si $u_n \to l$, alors $f(u_n) \to f(l)$ et donc $f(l) = l$. Ainsi la limite éventuelle de u est parmi les solutions de cette équation.
- • Si f est croissante alors u est monotone :
  - si $u_0 \leq u_1$, la suite est croissante,
  - sinon elle est décroissante.

5.4 Exercices

Exercice 5.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. Écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \geq M$.
4. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
5. $\forall x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Exercice 5.2. Tracer la fonction $f(x) = E\left(x + 1/2\right)$. Est-elle paire ?

Exercice 5.3. Comparer les fonctions

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \text{ et } g(x) = x - 1.$$

Exercice 5.4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y).$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
b) On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.
c) On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Déterminer f.

Exercice 5.5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les propositions suivantes :

a) La fonction f n'est pas constante.
b) 2 n'est pas l'image d'un réel par f.
c) f prend toujours la même valeur pour des nombres opposés.
d) Aucun réel positif n'est égal à son image.

Exercice 5.6. Montrer que la fonction $\dfrac{\cos(x)+4\sin(x)}{1+e^x}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.7. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1-x^3}{1-x^7}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x+3x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^4(x)}{x^3\ln(1+x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}\ -\ x$

f) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{4\cos^2x-3}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3\frac{x}{2}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^4)}{x(\tan x-\sin x)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\sin x}$

Exercice 5.8.
a) Limite éventuelle en 0, $+\infty$, $-\infty$ de $x\sin(\dfrac{\pi}{x})$
b) Limite éventuelle en 0 de $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^m}$, m paramètre entier strictement positif.
c) Limite éventuelle en π de $\dfrac{\sin x}{x(x-\pi)}$
d) Limite éventuelle en 0 de $(1+mx)^{\frac{1}{x}}$, m paramètre réel.
e) Limite éventuelle en 1, $+\infty$, $-\infty$ de $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

Exercice 5.9.
a) Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-1}{x} \text{ si } x<0\\[2mm] \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+1} \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 0 ?
b) Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} \text{ si } 0<x<1\\[2mm] 2 \text{ si } x=1\\[2mm] \dfrac{x+1}{3x-1} \text{ si } x>1\end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 1 ?

Exercice 5.10. Déterminer les valeurs du réel a pour que la fonction g définie par $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x} \text{ si } x<0\\[2mm] \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} \text{ si } x>0\end{cases}$ soit prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.11. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. Quel est son ensemble de définition ? Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.12. Soit
$$f(x) = \frac{1-\cos x}{1-\cos(\sin x)}$$

a) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle définie, continue ?

b) En quels points peut-on prolonger f par continuité ?

Exercice 5.13. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. f est dite *uniformément continue* ssi elle vérifie la propriété suivante : $(P)\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

a) Donner la négation de (P).

b) Montrer que $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue (on pourra choisir $\varepsilon = 1$, $x = \frac{1}{\alpha}, y = x + \frac{\alpha}{2}$ au-dessus).

c) Montrer que $f(x) = \sin(x)$ est uniformément continue.

Exercice 5.14. Soit f une fonction definie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit M un réel positif. On dit que f est *lipschitzienne* de rapport M si et seulement si elle vérifie :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

a) Soit f une fonction lipschitzienne de rapport M. Montrer qu'elle est uniformément continue.

b) Montrer que $g(x) = 3x + 4$ est lipschitzienne de rapport à préciser.

c) Soit f une fonction lipschitzienne de rapport M. Montrer
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M|x| + |f(0)|$$
et que $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.15. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie de la manière suivante. $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ avec p et q premier entre eux, q positif strictement, p non nul, $f(x) = 0$ si x irrationnel.

a) Essayer de donner le graphe de f.

b) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel.

c) Montrer que f est continue en tout point irrationnel.

Exercice 5.16. Étudier les suites suivantes.

a) $u_{n+1} = u_n^2 + 2$

b) $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, u_0 = 0$

c) $u_{n+1} = u_n + \sin u_n, u_0 = 0$

Exercice 5.17. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 5.18. Soit f une fonction réelle telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$.

a) Montrer que pour tout réel α il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \geq x_\alpha,\quad f(x) \geq |\alpha x| + |x|.$$

b) En déduire que pour tout réel α, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x = +\infty$.

Exercice 5.19. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que $g(x) > 0$ et il existe $l \in \mathbb{R}^*$, tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Montrer que si $l > 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 5.20.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout couple de réels (x, y) appartenant à $[a, +\infty[$, on a
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{a^2}|x-y|.$$

b) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \leq \varepsilon.$$

c) Écrire une formulation de la propriété précédente en termes de limite.

d) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5.21. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |x|$.

a) Interpréter graphiquement cette condition.

b) Montrer que f est continue en 0.

c) La fonction $x \to x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 5.22. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > -\frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. (Indication : chercher les points fixes de $f(x) = \sqrt{2x+3}$ qui est continue et croissante. tracer les six premiers termes de la suite et retrouver suivant la valeur de u_0 la nature de la suite conjecturer par le dessin : si $u_0 \in [-3/2, 3]$ la suite est croissante et majorée par 3. . . .)

Exercice 5.23. Etudier la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

(Indication : calculer les limites eventuelles $l = -4$ et $l = 1$.

- $u_0 < -4$ montrer que la suite est décroissante non minorée donc divergente.
- $u_0 > 4$ alors $u_1 < -4 \ldots$
- $-4 \leq u_0 \leq 0$: f est croissante sur $[-4, 0]$ en déduire que la suite diverge
- $2 \leq u_0 < 4$ alors $-4 \leq u_1 \leq 0$
- $0 \leq u_0 \leq 2$ montrer que tous les termes sont dans $[0, 2]$ et étudier u_{2n} en cherchant ses limites éventuelles et en montrant que cette suite extraite est croissante et majorée par 1.)

Chapitre 6

Continuité sur un intervalle et fonctions réciproques

6.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème suivant précise l'image d'un intervalle par une application continue. Rappelons une propriété caractéristique d'un intervalle : I est un intervalle si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2, [x,y] \subset I$.

Théorème 6.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et $(a,b) \in I^2$ tels que $f(a) \leq f(b)$.*
Alors f atteint toute valeur intermédaire comprise entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall \gamma \in [f(a), f(b)], \exists c \in I, f(c) = \gamma.$$

Démonstration. Si $\gamma = f(a)$ ou $f(b)$ alors on prend $c = a$ ou $c = b$.
Supposons que $f(a) < \gamma < f(b)$. Considérons $F = \{x \in [a,b], f(x) \leq \gamma\}$. On sait que F est majoré par b non vide car $a \in F$ donc F admet une borne supérieure notée c.

Montrons que $c = f(\gamma)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in F$ et $y_n \in [a,b] - F$ tels que $c - 1/n < x_n \leq c < y_n < c + 1/n$. En effet, $c - 1/n$ n'est pas un majorant de F donc il existe $x_n \in F$ tel que $c - 1/n < x_n \leq c$. D'autre part $F \subset [a,c]$ et $c < b$ (car $b \notin F$ parce que f est continue en b et que comme $\gamma < f(b)$ il existe un voisinage de b sur lequel $f(x) > \gamma$) et $c < c + 1/n \Longrightarrow \exists y_n \in [a,b]$ tel que $\begin{cases} y_n \notin F \\ c < y_n < c + 1/n \end{cases}$.

On peut prendre $y_n \in]c, min(c + 1/n, b)[$. Alors on en déduit que $x_n \to c$ et $y_n \to c$. D'où par continuité, $f(x_n) \to f(c)$ et $f(y_n) \to f(c)$. Mais, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq \gamma < f(y_n)$ d'où $\gamma = f(c)$. □

Corollaire 6.2. *Si une fonction continue sur un intervalle I prend des valeurs positives et négatives, alors elle s'annule en un point.*

Corollaire 6.3. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Exercice. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$. Soient p et q deux réels > 0. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0).$$

Théorème 6.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

" f est bornée et atteint ses bornes" signifie que $f([a,b]) = [m, M]$ avec $m = f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x),\ x_1 \in [a,b]$ et $M = f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x),\ x_2 \in [a,b]$.

Un intervalle de la forme $[a,b]$ est un *segment*. Le théorème ci-dessus et le corollaire précédent donnent :

Corollaire 6.5. *L'image d'un segment par une application continue est un segment.*

Démonstration du théorème 6.4. Montrons par l'absurde que f est majorée : supposons que f est non majorée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$. $(x_n) \subset [a,b]$ donc elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice σ et un réel $c \in [a,b]$ tel que $x_{\sigma(n)} \to c$. f est continue donc $f(x_{\sigma(n)}) \to f(c)$. D'autre part, $f(x_{\sigma(n)}) > \sigma(n) \geq n$ donc $f(x_{\sigma(n)}) \to +$ $infty$. D'où la contradiction.

En appliquant le résultat à $-f$, on montre que $-f$ est majorée donc que f est minorée.

Montrons maintenant que f atteint ses bornes.

Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $M - 1/n$ n'est pas un majorant de f il existe x_n dans $[a,b]$ tel que $M-1/n < f(x_n) \leq M$. D'après le théorème de Bolzano-Weiertrass, puisque (x_n) est bornée il existe une extractrice τ et un élément $d \in [a,b]$ tel que $x_{\tau(n)} \to d$. f est continue donc $f(x_{\tau(n)}) \to f(d)$. D'autre part, on a $M - \frac{1}{\tau(n)} < f(x_{\tau(n)}) \leq M$. Donc $M = f(d)$. □

6.2 Fonctions réciproques

6.2.1 Fonctions monotones

Lemme 6.6. *Soit $I \subset \mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.*

Démonstration. Soit $x_1, x_2 \in I$ avec $f(x_1) = f(x_2)$. Supposons que $x_1 < x_2$.

Alors, si f est strictement croissante, $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui est absurde.

Si f est strictement décroissante, $f(x_1) > f(x_2)$, ce qui est aussi absurde.

Donc $x_1 \geq x_2$. Le même raisonnement en partant de $x_2 < x_1$ amène à $x_1 \leq x_2$, ainsi $x_1 = x_2$ et donc f est injective. □

Lemme 6.7. *Soit $I \subset \mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone est une bijection sur son image.*

"f bijection sur son image" signifie que l'application de I dans $f(I)$ qui à x associe $f(x)$ est bijective. Cette application est souvent abusivement notée f.

Démonstration. Par le lemme précédent, f est injective, et par définition de la surjectivité, une application à valeur dans son image est toujours surjective. Donc f est bijective. □

Lemme 6.8. *Soit f une application bijective. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) alors l'inverse f^{-1} de f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Démonstration. Faisons le cas strictement croissant. Soit $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$. Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si $x_1 \geq x_2$ comme f est croissante on a $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire $y_1 \geq y_2$, ce qui est absurde. Donc on a $x_1 < x_2$, soit $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$: f^{-1} est strictement croissante. □

☞ **Remarque.** Il n'y a aucune hypothèse de continuité dans les lemmes précédents.

Lemme 6.9. *Soit I un intervalle. Une application $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone.*

Démonstration. On va montrer la contraposée : si f est non strictement monotone alors f est non injective. Remarquons que "f est non strictement monotone" est équivalent à "f est non strictement croissante et f est non strictement décroissante", ce qui est la négation de la phrase "f strictement croissante ou f strictement décroissante". Cette négation s'écrit

$$\text{non}((\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) \text{ ou } (\forall y_1, y_2, y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)))$$

ce qui est équivalent à

$$\underbrace{(\exists x_1, x_2, x_1 < x_2 \text{ et } f(x_1) \geq f(x_2))}_{(*)} \text{ et } \underbrace{(\exists y_1, y_2, y_1 < y_2 \text{ et } f(y_1) \leq f(y_2))}_{(**)}.$$

(attention, rien n'indique que $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.)

Pour $h \in [0,1]$, on pose

$$g(h) = f((1-h)x_1 + hy_1) - f((1-h)x_2 + hy_2).$$

Comme f est continue, g est continue, de plus d'après $(*)$, $g(0) = f(x_1) - f(x_2) \geq 0$, et d'après $(**)$, $g(1) = f(y_1) - f(y_2) \leq 0$. Donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires (corollaire 6.2 page 65), il existe $h_0 \in [0,1]$ avec $g(h_0) = 0$, ce qui donne

$$f((1-h_0)x_1 + h_0y_1) = f((1-h_0)x_2 + h_0y_2)$$

et de plus $(1-h_0)x_1 + h_0y_1) \neq (1-h_0)x_2 + h_0y_2)$ (car $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$), donc f n'est pas injective. □

Corollaire 6.10. *Une application continue et bijective est strictement monotone.*

> **Exercice.** Trouver un contre-exemple à l'énoncé du lemme si on ne suppose pas la continuité.

Proposition 6.11. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I.*
Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue.

Démonstration. On suppose que f est croissante, la preuve est similaire dans le cas décroissant. Soit $a \in I$, tel que a n'est pas le plus grand élément de I.

Comme f est croissante, elle admet en a une limite à droite $l \geq f(a)$.

Supposons que $l > f(a)$. Alors $\forall x \in I, \begin{cases} x > a \Rightarrow f(x) \geq l \\ x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a) \end{cases}$, donc f ne prend aucune valeur entre $f(a)$ et l. Mais comme a n'est pas le plus grand élément de I, il existe $b \in I$, $a < b$, avec $f(a) \leq l \leq f(b)$. Comme $f(I)$ est un intervalle, on a $[f(a), f(b)] \subset f(I)$, en particulier toutes les valeurs dans $]f(a), l[$ sont atteintes. Contradiction.

Donc $f(a) = l$ et f est continue à droite en a. On montre de la même façon que f est continue à gauche en tout point $a \in I$ qui n'est pas le plus petit élément de I. Donc f est continue en tout point de I. $\square$

Théorème 6.12. *Soit I un intervalle et $f : I\mathbb{R}$.*
Si f est continue et strictement monotone, alors

1. *$f(I)$ est un intervalle,*
2. *f est une bijection de I sur $f(I)$,*
3. *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Démonstration. Il ne reste qu'à montrer 3). Par définition f^{-1} est une bijection et par le lemme précédent elle est strictement monotone de l'intervalle $f(I)$ sur l'intervalle I, donc elle est continue par la proposition précédente. $\square$

Corollaire 6.13. *Si f est continue et bijective sur un intervalle, alors f^{-1} est continue.*

6.2.2 Fonctions trigonométriques réciproques

Par définition, la fonction sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est donc bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

Definition 6.14. *La bijection réciproque est la fonction* arc sinus $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et*

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$$

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x.$$

La fonction arcsinus est continue sur $[-1, 1]$ d'après le théorème 6.12.

> **Remarque.** Un angle est representé sur le cercle par un arc de cercle. La fonction réciproque de la fonction sinus donne l'angle, donc l'arc, d'une valeur, d'où le nom arcsinus.

Par définition la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle est donc bijective de $[0, \pi]$ dans $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Definition 6.15. *La bijection réciproque est la fonction* arc cosinus $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ *et*

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x.$$

La fonction arcsinus est continue sur $[-1, 1]$ d'après le théorème 6.12.

> **Attention !** Si $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) \neq x$, et si $x \notin [0, \pi], \arccos(\cos(x)) \neq x$.

Lemme 6.16. *$arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$.*

Démonstration. Si $x \in [-1,1]$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)) = \sin(\arcsin(x)) = x(*)$. Or $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \leq \pi$. Donc on a

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x))) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).$$

Avec $(*)$ on a $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. □

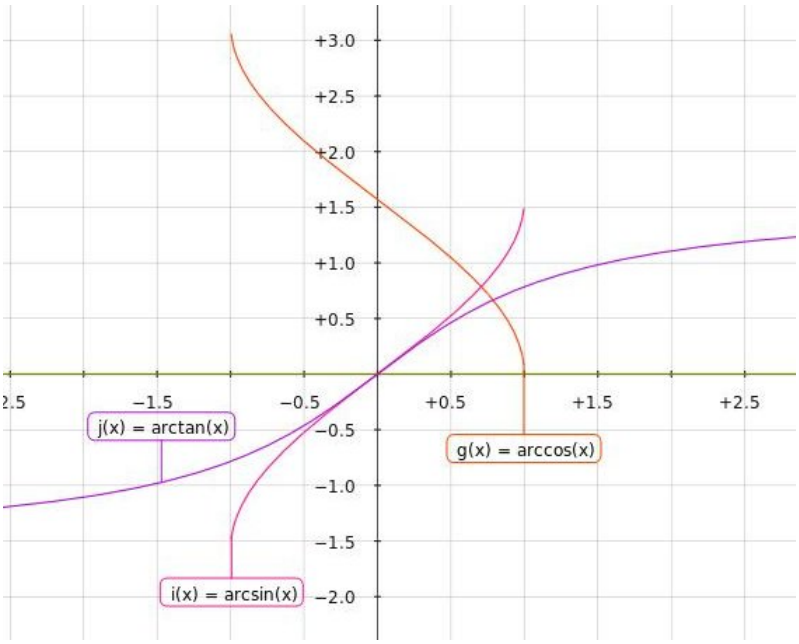
Par définition la fonction tangente est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est donc bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-$
$infty, +$
$infty[$.

Definition 6.17. *La bijection réciproque est la fonction* arc tangente $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x.$$

La fonction arctangente est continue sur $[-1,1]$ *d'après le théorème 6.12*



De la même manière, on introduit les fonctions inverses des fonctions trigonométriques hyperboliques, qui se nomment *argument cosinus hyperbolique*, *argument sinus hyperbolique* et *argument tangente hyperbolique* et que l'on note $arg\cosh, arg\sinh, arg\tanh$. Contrairement au cas circulaire, une simple calcul donne explicitement ces inverses.

Exercice. Montrer que

1. $arg\cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \forall x \in [1, +$
   $infty[$,
2. $arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \forall x \in \mathbb{R}$,
3. $arg\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \forall x \in]-1,1[$.

6.3 Exercices

Exercice 6.1.

a) Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que, si P un polynôme réel de degré impair, il admet au moins une racine réelle.

Exercice 6.2.
a) Soit f une fonction définie et continue sur [0,1] à valeurs dans [0,1]. Montrer que f admet un point fixe.
b) Soit f et g des fonctions définies et continues sur l'intervalle [0,1]. On suppose que $f(0) = g(1) = 0$, $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall\lambda > 0, \exists x \in [0,1], f(x) = \lambda g(x)$$

Exercice 6.3. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$.

$$P1 : \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0)$$

$$P2 : \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$$

a) $P1$ et $P2$ sont-elles équivalentes ?
b) Donner une CNS pour que $P1$ soit vraie.
c) Donner une CS simple pour que $P1$ et $P2$ soient équivalentes.

Exercice 6.4.
a) Donner un exemple d'une fonction f sur $[0,1]$, non constante, telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$.
b) Soit f continue sur sur $[0,1]$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante.
c) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I telles que pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 6.5.
a) Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire est impaire.
b) Pourquoi ne peut-on pas parler de la fonction réciproque d'une fonction paire ?

Exercice 6.6. Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Montrer que f est continue, bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 6.7. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ selon les valeurs du paramètre réel m.

Exercice 6.8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+2} & si \quad x < -1 \\ 2x+3 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+2x+3 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Tracer son graphe.
b) Montrer que f est continue et strictement croissante.
c) Donner les formules définissant sa fonction réciproque g et tracer le graphe de f et de g.

Exercice 6.9. Soient f et g deux fonctions continues de [0,1] dans [0,1] telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe un point c dans [0,1] tel que $f(c) = g(c)$. On raisonne par l'absurde. On suppose que le résultat est faux.
1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que soit $\forall a \in [0,1], f(a) - g(a) > \alpha$ (1)
ou soit $\forall a \in [0,1], g(a) - f(a) > \alpha$ (2)
2) On note $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois). Dans le cas (1), montrer que $\forall n > 0, \forall x \in [0,1], f_n(x) - g_n(x) > n\alpha$
3) Conclure.

Exercice 6.10.
a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = f(|x|) > 0$. Montrer que f est paire.

Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation

$$x^2(\cos x)^n + x\sin x + 1 = 0$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.11. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(2\arccos(x))$

b) $\cos(2\arcsin(x))$

c) $\sin(2\arccos(x)$

d) $\cos(2\arctan(x)$

e) $\sin(2\arctan(x)$

f) $\tan(2\arcsin(x)$

Chapitre 7

Dérivabilité

7.1 Fonctions dérivées

7.1.1 Définitions

Definition 7.1. *Soit $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* dérivable *en a si la limite quand h tend vers* 0 *de*

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est finie. Dans ce cas on la note $f'(a)$ et on l'appelle le nombre dérivé de f en a.

☞ **Remarque.** On peut remplacer le *taux de variation* (ou taux d'accroissement)

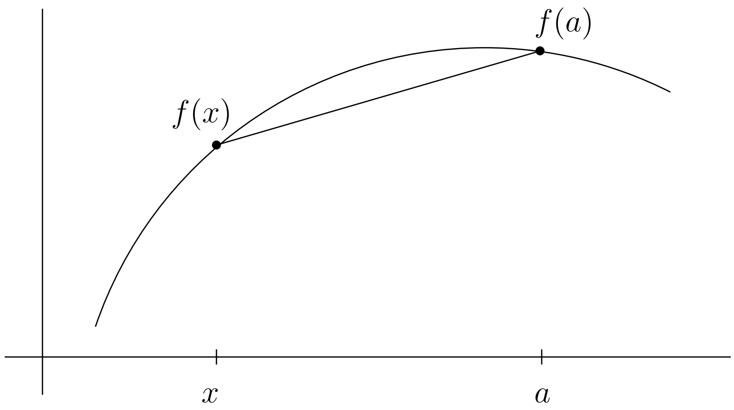
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

par

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

en posant $x = a + h$ et alors on étudie la limite quand $x \mapsto a$.

La taux de variation est la pente du segment joignant $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$.



Definition 7.2. *1. f est dérivable à droite si le taux de variation à une limite à droite et on la note $f'_d(a)$.*

2. f est dérivable à gauche si le taux de variation à une limite à gauche et on la note $f'_g(a)$.

Proposition 7.3. *f est dérivable en a* $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a). \end{cases}$

Exercice. Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Proposition 7.4. *f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a.*

Démonstration. Il suffit d'écrire que $f(a+h) = f(a) + h\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et de faire tendre h vers 0. □

☠ **Attention !** La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

◇ **Exemple.** Soit une fonction f non continue en a : $\lim_{x\to a} f(x) = K \neq f(a)$. Alors quand $x \to a$, $f(x)-f(a)$ tend vers une quantité finie, et $x-a$ tend vers 0. Donc le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'a pas de limite quand x tend vers a. Cet exemple illustre la contraposée de la proposition précédente.

Definition 7.5. *Si f est dérivable en a, la* tangente *de la courbe de f en a est la droite passant par $(a, f(a))$ et de pente $f'(a)$: c'est la droite d'équation*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

On remarque que la tangente est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.

7.1.2 Application dérivée

Definition 7.6. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I. La* fonction dérivée *de f, notée f', est*

$$f' : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(x) \end{array}.$$

La proposition 7.4 donne immédiatement qu'une fonction dérivable sur I est continue sur I.

Théorème 7.7. *Soit $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables sur I. Alors,*

1. *$f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.*
2. *λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.*
3. *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*
4. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $(\dfrac{1}{g})' = \dfrac{-g'}{g^2}$.*
5. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $(\dfrac{f}{g})' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Théorème 7.8. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Démonstration.

$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a)}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} g'(f(a))f'(a)$$

□

⚙ **Exercice.** Calculer f' en fonction de g' : a) $f(x) = g(ax+b)$, b) $f(x) = g(a+g(x))$.

7.1.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 7.9. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ bijective et continue sur I, dérivable en a et telle que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$, est dérivable en $f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. $\forall y \in f(I) - \{f(a)\}$, on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f^{-1}(f(y)) - f(a)}.$$

Puisque f est dérivable en a, que $f'(a) \neq 0$ et que $f^{-1}(y) \to a$ quand $y \to f(a)$, on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} \xrightarrow[y \mapsto f(a)]{} \frac{1}{f'(a)}.$$

□

7.1.4 Dérivée des fonctions usuelles

Exercice. Calculer les dérivées suivantes.

1. $f(x) = ax + b$ en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ en tout $x_0 > 0$ puis en 0.

- $\ln(x)' = \dfrac{1}{x}$ par définition du logarithme.
- L'exponentielle est la réciproque du logarithme, donc par le théorème 7.9 on a

$$(e^x)' = (\ln^{-1}(x))' = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

- Si $n \in \mathbb{N}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(f^n(x))' = nf'(x)f^{n-1}(x)$.
- Si $n \in \mathbb{Z}$ est négatif, utiliser la formule au-dessus en écrivant $n = -|n|$, quand $x \neq 0$.

Exercice. Calculer les dérivées de $\cos, \sin, \tan$.

Exercice. Calculer les dérivées de $\cosh, \sinh, \tanh$.

Exercice. Montrer que

1. $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
2. $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
3. $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
4. $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Simplifier $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice. Montrer que

1. $arg\cosh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
2. $arg\sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,
3. $arg\tanh'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

7.1.5 Application à l'étude des suites récurrentes

On reprend les notations de la page **??**.

Proposition 7.10. *Soit a un point fixe de f $(f(a) = a)$. Si f est dérivable en a et $|f'(a)| > 1$, alors $u_n \to a$ si et seulement si u est stationnaire.*

Démonstration. On remarque que si il existe n_0 tel que $u_{n_0} = a$, alors la suite u est constante à partir du rang n_0.

Supposons que pour tout n, $u_n \neq a$. On a

$$\frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = \frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a} \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} f'(a).$$

Donc à partir d'un certain rang, $\left|\frac{u_{n+1} - a}{u_n - a}\right| \geq 1$ si $f'(a) > 1$, ce qui signifie que la suite de terme général $|u_n - a|$ est croissante, donc elle ne peut pas converger vers 0, donc u ne converge pas vers a, ce qui est absurde. □

7.2 Le théorème des accroissements finis

7.2.1 Extremum local d'une fonction

Definition 7.11. *Soit $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que a est un* minimun local *(resp.* maximum local*) s'il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) \geq f(a)$ (resp $f(x) \leq f(a)$).*

Si a est un maximum local ou un minimum local on dit que c'est un extrémum local *de f.*

Si les ingalités sont strictes, l'extremum local est strict.

Théorème 7.12. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application.*

$$\left\{\begin{array}{l} a \in \mathring{I} \\ f \text{ est dérivable en } a \\ a \text{ est un extrémum local} \end{array}\right. \Rightarrow f'(a) = 0.$$

Démonstration. Supposons que a est un maximum local. Soit $h > 0$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'(a) \leq 0$. Soit $h < 0$, on a alors $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(a) \geq 0$. Donc $f'(a) = 0$. □

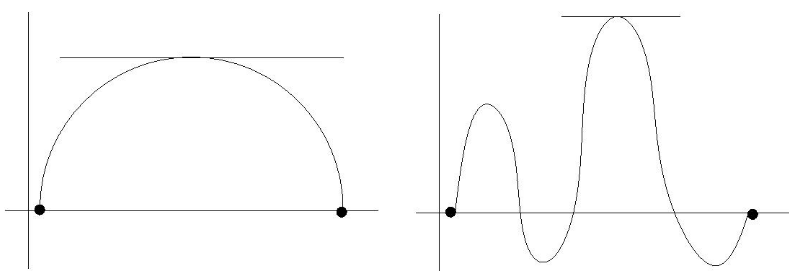
☞ **Remarque.** La récriproque est fausse. Par exemple la dérivée de $x \to x^3$ est nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local.

Il faut que l'intervalle soit ouvert. Sinon on peut prendre par exemple la restriction d'une fonction de la forme $x \to ax + b$, $a \neq 0$ (dont le graphe est une droite) à un segment. Alors les bornes du segment sont des extrema mais le dérivée ne s'annule pas en ces points.

Théorème 7.13 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application.*

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b], \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[, \\ f(a) = f(b) \end{array}\right. \to \exists c \in]a, b[\ / \ f'(c) = 0.$$

☞ **Remarque.** Le point c n'est pas forcément unique.



Démonstration. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 6.1 page 65), puisque f est continue sur $[a, b]$ f est bornée et atteint ses bornes $m = inf f(x)$ et $M = sup f(x)$.
Si $m = M$, f est constante donc $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$.
Supposons $m < M$, on ne peut avoir $M = f(a)$ et $m = f(a)$, supposons $M \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$ $(f(a) = f(b))$.

Par suite, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$.
Soit $h > 0$ tel que $c + h \in [a, b]$,

$$\begin{cases} c + h \geq c \\ f(c+h) \leq f(c) \end{cases} \Rightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Donc $f'(c) \leq 0$.
Soit $h < 0$ tel que $c + h \in [a, b]$,

$$\begin{cases} c + h \leq c \\ f(c+h) \leq f(c) \end{cases} \Rightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

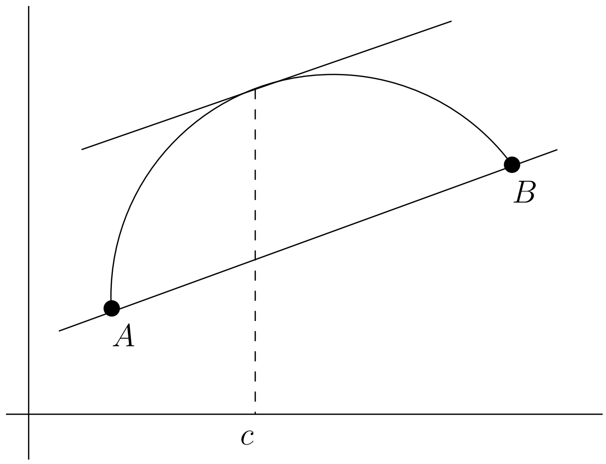
Donc $f'(c) \geq 0$. Finallement, on en déduit que $f'(c) = 0$. □

Théorème 7.14 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application.*

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b], \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a, b[\ / \ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Démonstration. C'est une application du théorème de Rolle. Soit $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, $\forall x \in [a, b]$. φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ d'où le résultat. □

☞ **Remarque.** Graphiquement ce résultat dit qu'il existe un point de la courbe représentative de f d'abscisse $c \in]a, b[$ en lequel la tangente est parallèle à la droite (A, B) avec $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Corollaire 7.15. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $f' = 0 \Rightarrow f$ constante.*

La réciproque est immédiate.

Démonstration. Pour tout $x, y \in [a, b]$, $x < y$ le théorème des accroissements finis dit que il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0 = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ ce qui donne $f(x) = f(y)$. □

Théorème 7.16 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.*

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b], \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[, \\ f' \text{ est bornée par } M \text{ sur } [a, b] \end{cases} \Rightarrow \forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq M|(x - y)|.$$

♢ **Exemple.** Comme $\sin'(x) = \cos(x)$ est bornée par 1, on a

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Démonstration. si $x = y$ l'égalité est évidente. Supposons que $x < y$.Puisque f est continue sur $[x, y]$ dérivable sur $]x, y[$ d'après le théorème des accroissements finis appliqué a f sur $[x, y]$ on sait qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Comme $|f'(c)| \leq M$, on a le résultat voulu. ☐

Théorème 7.17 (Théorème de la dérivée)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$.*

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b], \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\backslash\{x_0\}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \end{cases} \Longrightarrow f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = \ell.$$

Démonstration. soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0, \forall x \neq x_0, |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f'(x) - l| \leq \varepsilon$.
Soit $t \in I - \{x_0\}$ tel que $|t - x_0| \leq \eta$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la restriction de f sur l'intervalle fermé d'extrémités x_0 et t $\exists c_t$ tel que $f(t) - f(x_0) = f'(c_t)(t - x_0)$ avec $|c_t - x_0| \leq |x - x_0| \leq \eta$. D'où on a $|\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} - l| = |f'(c_t) - l| \leq \varepsilon$. On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I, t \neq x_0, (|t - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - l| \leq \varepsilon).$$

☐

Variation des fonctions

Proposition 7.18. *Soit I* **un intervalle** *de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.*

1. *f est constante ssi $f'(x) = 0$ sur I.*
2. *f est croissante ssi $f'(x) \geq 0$ sur I.*
3. *f est décroissante ssi $f'(x) \leq 0$ sur I*

> ☠ **Attention !** On a pas par exemple si f est strictement croissante alors $f'(x) > 0$ sur I. Par exemple x^3 en 0.

Démonstration. On ne va montrer que le 2), pour le reste les démonstrations sont analogues.
supposons que f est croissante. Soit $x_0 \in I$ sans être une extrémité, $h \neq 0$ tel $x_0 + h \in I$, on a $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.
Réciproquement soit $(x_1, x_2 \in I$ tel que $x_1 \leq x_2$. d'après le théorème des accroissements finis appliqué a f sur $[x_1, x_2]$ on sait qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$. Comme $f'(c) \geq 0$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$. Donc f est croissante. ☐

7.3 Formules de Taylor

7.3.1 Dérivée successive

Definition 7.19. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I, alors on note f'' ou la dérivée de f'. C'est la* dérivée seconde *de f.*

Par récurrence on définit, si elle existe, $f^{(k)}$, la dérivée k-ième de f, $k \in \mathbb{N}$, avec $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$.

On dit que f est indéfiniment dérivable *sur I si f est n fois dérivable $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 7.20. *Soit $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ deux applications n fois dérivables sur I. Alors,*

1. *$f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.*
2. *λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.*
3. *fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, (Formule de Leibniz).*
4. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{1}{g}$ est n fois dérivable sur I.*
5. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.*

Démonstration. À part 3., les résultats sont évidents. Montrons 3. par récurrence sur n : pour $n=1$ c'est déja vu. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^(n))' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \quad (l = k+1)$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \quad \left(\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) f^{(l)} g^{(n+1-l)}, \quad \text{(règle de Pascal)}$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} f^{(l)} g^{(n+1-l)}.$$

□

Exercice. Montrer que $f(x) = x^2|x|$ est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$.

7.3.2 Classe d'une fonction

Definition 7.21. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalle ouvert.*

1. *soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe C^n sur I si*

$$\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } I \end{cases}$$

2. *On dit que f est de classe C^∞ si f est indéfiniment dérivable.*

   ♢ **Exemple.** La plupart des fonctions usuelles, comme les polynômes, $\ln$, $\exp, \cos, \sin, \tan, \cosh, \sinh, \tanh$, sont C^∞.

Théorème 7.22. *Soit $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^n sur I. Alors,*

1. *$f + g$ est de classe C^n sur I.*
2. *λf est de classe C^n sur I.*
3. *fg est de classe C^n sur I.*
4. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{1}{g}$ est de classe C^n sur I.*
5. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{f}{g}$ est de classe C^n sur I.*

Théorème 7.23. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où $f(I) \subset J$. Si f est de classe C^n sur I et g est de classe C^n sur J alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.*

Corollaire 7.24 (Corollaire du théorème de la dérivée). *Si f est continue sur $[a, b]$, C^1 sur $]a, b[\backslash\{c\}$, et si f' est prolongeable par continuité en c, alors f est C^1 sur $]a, b[$.*

7.3.3 Fonctions convexes

Definition 7.25. *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est* convexe *lorsque*

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

f est concave *si $-f$ est convexe.*

☞ **Remarque.** La convexité signifie géométriquement que le graphe de f est en dessous de toutes les cordes qui joignent deux points de ce graphe.

Il vient de la définition que si f est convexe, alors

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

et il vient que

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Théorème 7.26 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)**.** *1. Si f est dérivable, alors (f convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante).*

2. Si f est deux fois dérivable, alors (f convexe $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$).

On obtient des inégalités intéressantes, dénommées "inégalités de convexité" de la façon suivante :

1. On se donne une fonction f ;
2. On vérifie qu'elle est convexe sur I en calculant f'' ;
3. On écrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

Exercice.

1. Écrire une inégalité de convexité en utilisant la fonction $f(x) = -ln(x)$.
2. En déduire l'inégalité de Young : $\forall a > 0, b > 0, \forall p > 0, q > 0$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
3. Montrer que $\forall (x, y) \in (R_*^+)2$,
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$
(la moyenne géométrique de deux nombres est inférieure a la moyenne arithmétique).
4. Montrer que $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (R_*^+)^n$,
$$(x_1 + \cdots + x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

7.3.4 Formule de Taylor–Young

Théorème 7.27 (Formule de Taylor–Young à l'ordre n)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application n fois dérivable sur I avec $n \geq 1$.*
On peut écrire pour $|h|$ assez petit et $a \in I$

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$.

☞ **Remarque.**

- La formule s'écrit aussi, pour x dans un voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x - a)$$

avec $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow a$.

- Pour $n = 0$, on a $f(a+h) = f(a)+\varepsilon(h)$, c'est-à-dire $\lim_{h\mapsto 0} f(a+h) = \lim_{h\mapsto 0}(f(a)+\varepsilon(h)) = f(a)$, ce qui est exactement la définition de la continuité.
- Pour $n = 1$, on a $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$, ce qui s'écrit $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h)$, ce qui donne $\lim_{h\mapsto 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$, ce qui est exactement la définitin de $f'(a)$.

Théorème 7.28 (Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre $n+1$)**.** *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que f est de classe C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Démonstration. Si $n = 0$ c'est le théorème des accroissements finis.

Soit $\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - A(b-x)^{n+1}$ avec $x \in [a, b]$ et on choisit A tel que $\varphi(a) = 0$. φ est continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or $\varphi'(x) = A(n+1)(b-x)^n - \frac{f^{n+1}(x)}{n!}(b-x)^n$. Donc on a

$$(b-c)^n(A(n+1) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}) = 0 \Longrightarrow A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

On conclut avec $\varphi(a) = 0$. □

Corollaire 7.29. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ tel que $\lim_{x\to a^+} f'(x) = l$. Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, comme $f'(x) \to l$ quand $x \to a^+$ $\exists\alpha > 0$ tel que $|f'(x)-l| \leq \varepsilon$ si $a < x < a+\alpha$. Soit $t \in]a, a + \alpha[$, f est continue sur $[a, t]$ dérivable sur $]a, t[$ donc d'après le théorèmes des accroissements finis il existe $c \in]a, t[$ tel que $f(t) - f(a) = f'(c)(t - a)$. Puisqu'on a $a < c < t$ et $t < a + \alpha$ il vient que $a < c < a + \alpha \Longrightarrow |f'(c) - l| \leq \varepsilon$. Ainsi, on a $|\frac{f(t)-f(a)}{t-a} - l| \leq \varepsilon$.
On a ainsi montré que $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0,\ \forall t \in]a, a + \alpha[\Longrightarrow |\frac{f(t)-f(a)}{t-a} - l| \leq \varepsilon$. □

7.4 Exercices

Exercice 7.1. Vrai ou faux ?

1. toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque ?
2. Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors f est dérivable en x_0.
3. Si f est dérivable sur $]0, 2[$ et $f'(1) = 0$ alors f admet un extrémum local en 1.
4. Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0, alors f est dérivable en x_0.
5. La dérivée de $f(x) = \cos(2x)$ est $f'(x) = -\sin(2x)$.

Exercice 7.2. Les énoncés suivants sont ils corrects ? Si la réponse est non, les corriger.

1. Soit f dérivable sur $[a, b]$ continue sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
3. Interprétation graphique du théorème des accroissements finis : soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe une $c \in]a, b[$ tel que le graphe de f admet au point $C = (c, f(c))$ une tangente qui passe par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.
4. Questions : peut-on appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Même avec $g(x) = 5x^2 + 3$ sur $[0, 2]$.

Exercice 7.3. Calculer les dérivées suivantes

a) $f(x) = \sin(\cos(x))$ $g(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

b) $h(x) = \frac{1}{1+\tan(x)}$ $i(x) = e^{e^x}$.

c) $j(x) = \sin(x^5 + 2x)$ $k(x) = \sin\left(\dfrac{x^2}{\cos(x^2)}\right)$

d) calculer f' en fonction de g' : $f(x) = g(x + g(x))$ et $f(e^{x+3}) = g(x^3)$.

Exercice 7.4. Étudier et calculer si elle existe la dérivée en 0 de

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 7.5. Soit f et g dérivables en x_0.

a) Montrer que fg est dérivable en x_0 et calculer $(fg)'(x_0)$.

b) Si $g(x_0) \neq 0$, montrer que f/g est dérivable en x_0 et calculer $(f/g)'(x_0)$. (Indication : étudier dans un premier temps $1/g$.)

Exercice 7.6. En utilisant des théorèmes du cours, montrer que

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a^n < \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n$.

c) Si $a_0, \ldots, a_n$ vérifient $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ alors $\exists x \in]0,1[$ tel que $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$.

Exercice 7.7. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = -1$. Montrer que

a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -1$.

b) $\exists x_1 \in]0,1[, f(x_1) < 0$.

c) $\exists x_2 \in]0,1[, f(x_2) = 0$.

d) $\exists x_3 \in]0,1[, f'(x_3) = 0$.

Exercice 7.8. Soit f continue sur $[0,+\infty)$, dérivable sur $]0,+\infty)$ et $f(0) = 0$ et f' croissante.

a) Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) \leq xf'(x)$.

b) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est croissante.

Exercice 7.9. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ avec $P_n(x)$ polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré n.

Exercice 7.10. Soit $g_1(x)$ la dérivée d'ordre 1 de $x^2 - 1$, $g_2(x)$ la dérivée d'ordre 2 de $(x^2-1)^2$, $g_n(x)$ la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$.

a) Calculer $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$, $0 < p \leq n$.

b) Calculer la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ puis de $(x+1)^n$.

c) En déduire la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ en 1 et la dérivée d'ordre p de $(x+1)^n$ en -1.

d) Calculer les dérivées d'ordre p en 1 et -1 de $(x^2-1)^n$, $0 \leq p \leq n$.

e) Montrer que si $n \neq 0$, $g_n(x)$ s'annule au moins n fois dans $]-1,1[$. (Indication : utiliser d) et Rolle.)

Exercice 7.11. Soit $f(x) = 2xe^{x^2}$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable.

b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

c) Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $(f^{-1})''(0)$.

Exercice 7.12. Soit f C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver la limite quand $h \to 0$ de $\dfrac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2}$.

Exercice 7.13. Calculer la limite en 0 de la fonction $x \to \dfrac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{x^5}$.

Exercice 7.14. Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 telles que $g(0) = h(0)$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x < 0 \\ h(x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 0 (Indication : deviner la solution en raisonnant graphiquement).

Exercice 7.15. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^2.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 7.16. Soit $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$.

a) Montrer que f est infiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que f est continue en 0.

c) Montrer que f est dérivable en 0.

d) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-m_n}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ où m_n est un naturel non nul, $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients réels.

f) En déduire que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

g) Déterminer une fonction non identiquement nulle infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'extérieur de $[0,1]$.

Exercice 7.17. Soit $f(x) = |x|$. La fonction f est-elle C^∞ sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$, C^3 sur $[-1, 0]$,$[0, 1]$, $[-1, 1]$?

Exercice 7.18.

a) Montrer que l'on a $\forall x \in]0; \pi[,\ x\cos(x) - \sin(x) < 0$.

b) étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

c) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}$.

Exercice 7.19. Soit p un entier positif.

a) Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.

b) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que l'on a

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Exercice 7.20. Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ avec $0 < a < b$. On suppose de plus que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine. On pourra introduire la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 7.21. Soit P un polynôme réel, ayant n racines réelles distinctes. Montrer que P' en a au moins $n-1$.

Exercice 7.22. Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

Exercice 7.23. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[0,1]$, dérivables sur $]0,1[$ et telles que :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f(1) = g(1)$$

On va montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les représentations graphiques de f et de $g + \lambda$ sont tangentes.
Remarque : $g + \lambda$ *est la fonction* $x \mapsto g(x) + \lambda$.

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Montrer que $\exists c \in [0,1]\ /\ h'(c) = 0$.
2. On prend $\lambda = h(c)$. Écrire l'équation de la tangente de f, puis de $g+\lambda$, au point d'abscisse c. Conclure.

Exercice 7.24. Soit f une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ sur un intervalle ouvert contenant a. Calculer :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}$$

Exercice 7.25. Soit f infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, nulle à l'extérieur de $[0,1]$. Montrer que

$\forall n>0, \exists a_1,a_2,\dots,a_{n+1}\in]0,1[$ avec $a_1<a_2<\dots<a_{n+1}$ et $f^{(n)}(a_1)f^{(n)}(a_2)<0, f^{(n)}(a_2)f^{(n)}(a_3)<0,\dots,f^{(n)}(a_n)f^{(n)}$

Exercice 7.26. Pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on considère la propriété suivante

$$(P):\forall a,b\in\mathbb{R}, f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$$

a) Soit $f(x)=Ax^2+Bx+C$. Montrer que f vérifie (P).

b) Soit f de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour f entre a et $\frac{a+b}{2}$, puis entre b et $\frac{a+b}{2}$. En déduire que $\forall d\in\mathbb{R}, f^{(3)}(d)=0$. En déduire que f est un polynôme de degré au plus 2.

c) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Montrer que $\forall x\in R, f'(x)=\frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}$, puis montrer que f est de classe C^3. Conclure.

Exercice 7.27. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C>0, \forall x,y\in\mathbb{R},\ |f(x)-f(y)|\leq C|x-y|^2.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en déduire qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.28. Déterminer la dérivée n-ième de la fonction $f(x)=x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{p}^2$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7.29. Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis

$$\lim_{x\to+\infty} x2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}).$$

Exercice 7.30.

a) Montrer qu'il existe un unique réel l tel que $cosl=l$. Montrer que $0\leq l\leq 1$.
Soit la (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=cos(u_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq 1$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-l|\leq(sin(1))|u_n-l|$.

d) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-l|\leq(sin(1))^n|u_0-l|$. En déduire que (u_n) converge vers l.

Exercice 7.31. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$, et $f'(0)=-1$. Montrer que

a) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$,

b) $\exists x_1\in]0,1[,\ f(x_1)<0$,

c) $\exists x_2\in]0,1[,\ f(x_2)=0$,

d) $\exists x_3\in]0,1[,\ f'(x_3)=0$.

Exercice 7.32. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1$ et telle que $f(0)=g(0)$ et $f(1)=g(1)$. On va montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que les représentations graphiques de f et $g+\lambda$ sont tangentes.

a) Soit $h(x)=f(x)-g(x)$. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $h'(c)=0$.

b) On prend $\lambda=h(c)$.. Ecrire l'équation de la tangente de f, puis de $g+\lambda$ au point d'abscisse c et conclure.

Exercice 7.33. Soit f de classe $C3$ sur un intervalle ouvert contenant a. Calculer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 7.34. Calculer la limite en 0 de la fonction $x \to \dfrac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{x^5}$.

Exercice 7.35. On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan(2x)$.
a) Étudier f et la tracer.
b) Montrer que f est une bijection et faire l'étude de la fonction réciproque. La tracer.

Exercice 7.36. Soit $f(x) = \arcsin(4x3 - 3x)$.
a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.
b) Étudier sa dérivabilité.
c) Montrer que $f(x) = -3\arcsin(x)$ si $x \in [-1/2, 1/2]$.
d) Calculer $f(x)$ pour $x \in [1/2, 1]$.

Exercice 7.37. Comparer $\arccos(x)$ et $\arcsin(\sqrt{1 - x2})$.

Exercice 7.38. Calculer $f(x) = \arcsin(\cos(2x))$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.39. Soit $f(x) = \arcsin(x)$.
a) Calculer $f''(x)$ en fonction de f'
b) En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.40. Soit $f(x) = \ln(\tanh(x/2))$.
a) Faire l'étude de f.
b) Déterminer f^{-1}.

Exercice 7.41. Vérifier les formules suivantes :
a) $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.
b) $\arcsin(4/5) = 2\arctan(1/2)$.

Exercice 7.42. Résoudre $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Annexes

Annexe A

Alphabet grec

majuscule	minuscule	nom	majuscule	minuscule	nom
A	α	alpha	B	β	beta
Γ	γ	gamma	Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon	Z	ζ	zeta
H	η	eta	Θ	θ, ϑ	thêta
I	ι	iota	K	κ	kappa
Λ	λ	lambda	M	μ	mu
N	ν	nu	Ξ	ξ	xi
O	o	omicron	Π	π, ϖ	pi
P	ρ, ϱ	rhô	Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau	Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ, φ	phi	X	χ	chi
Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega

Annexe B

Notations

- $a \in A$: l'élément a appartient à l'ensemble A.
- $a \notin A$: l'élément a n'appartient pas à l'ensemble A.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}$: somme pour i allant de 1 à n (i entier).
  Exemple : $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.
- $\Pi_{i=p}^{n}$, $p, n \in \mathbb{N}$: produit pour i allant de 1 à n (i entier).
  Exemple : $\Pi_{i=2}^{5} i^2 = 2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times 5^2$.
- $n!$, $n \in \mathbb{N}$: factorielle n. On a $n! = \Pi_{i=1}^{n} n$, et par convention, $0! = 1$.
- $\binom{n}{p}$, $p, n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$: coefficients binomiaux. C'est le nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments :
  $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$
  On trouve parfois la notation C_n^p.
- $E(x)$: la partie entière de x. C'est le plus grand entier relatif tel que
  $$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$
- resp. :
- ssi :
- lemme, prop etc.
- sup inf page 33

Annexe C

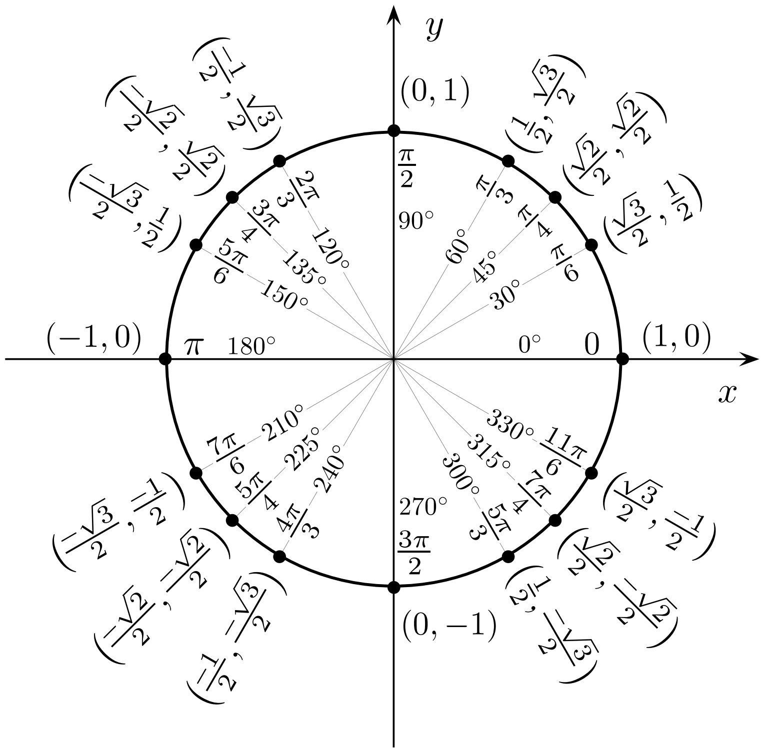
Trigonométrie circulaire

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$
$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{1}{\cot(a)}$$
$$1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$
$$1 + \cot^2(a) = \frac{1}{\sin^2(a)}$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\tan(-a) = -\tan(a)$$
$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$
$$\tan(\pi - a) = -\tan(a)$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$
$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$
$$\tan(\pi + a) = \tan(a)$$
$$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$$
$$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$$
$$\tan(\pi/2 - a) = 1/\tan(a)$$
$$\sin(\pi/2 + a) = \cos(a)$$
$$\cos(\pi/2 + a) = -\sin(a)$$
$$\tan(\pi/2 + a) = -1/\tan(a)$$
$$\sin(3\pi/2 - a) = -\cos(a)$$
$$\cos(3\pi/2 - a) = -\sin(a)$$
$$\tan(3\pi/2 - a) = 1/\tan(a)$$
$$\sin(3\pi/2 + a) = -\cos(a)$$
$$\cos(3\pi/2 + a) = \sin(a)$$
$$\tan(3\pi/2 + a) = -1/\tan(a)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin((p+q)/2)\cos((p-q)/2)$$
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin((p-q)/2)\cos((p+q)/2)$$
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos((p+q)/2)\cos((p-q)/2)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin((p+q)/2)\sin((p-q)/2)$$
$$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$$
$$\tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$$
$$\sin(a)\sin(b) = (1/2)(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\cos(a)\cos(b) = (1/2)(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$
$$\sin(a)\cos(b) = (1/2)(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = 2\frac{\tan(a)}{1 + \tan^2(a)}$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan(2a) = 2\frac{\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$
$$\sin^2(a) = (1 - \cos(2a))/2$$
$$\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$$
$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$
$$\tan(a) = \frac{\sin(2a)}{1 + \cos(2a)} = \frac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)}$$

$\sin(a) = \sin(b) \Rightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$
$\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$
$\tan(a) = \tan(b) \Rightarrow a = b + k\pi$
$t = \tan(\frac{a}{2}) \Rightarrow \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$

$(\cos(a) + i\sin(a))^n = \cos(na) + i\sin(na)$ (Moivre)
$\cos(a) = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia})$, $\sin(a) = \frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia})$ (Euler)



Angle	**Cosinus**	**Sinus**	**Tangente**
0	1	0	0
π	-1	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1	X
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$

Annales

Université de Cergy-Pontoise
UFR de Sciences et techniques

Vendredi 22 décembre 2006
M1

Mathématiques

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1:
1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire la définition mathématique de $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
2) Ecrire la négation de la proposition mathématique obtenue dans la question précédente.

Exercice 2: Déterminer, si elles existent, les limites des quantités suivantes:
1) $A(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$, quand x tend vers 0

2) $B(x) = \dfrac{\ln(x^4) + 2x^2}{3x^2 + \ln(x^4)}$, quand x tend vers $+\infty$

3) $C(x) = (e^x + x^2)\ln(1 + 3e^{-x})$, quand x tend vers $+\infty$

Exercice 3: Soient a_n et b_n deux suites vérifiant

$$\forall n \geq 0,\ a_n > 0,\ b_n > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

1) Montrer que $\forall n \geq 0,\ a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$. Que peut-on dire du signe de $a_n - b_n$ pour $n \geq 1$?
2) Montrer que les suites a_n et b_n sont décroissantes, et ceci à partir du rang 1.
3) Montrer que les suites a_n et b_n sont convergentes.
4) Montrer que les suites a_n et b_n convergent vers une même limite.

Exercice 4: Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant
(i) $\forall x \in [0, 1],\ x^2 \leq f(x)$
(ii) $\forall x \in [0, 1],\ x - x^2 \leq f(x)$
(iii) $\forall x \in [0, 1],\ f(x) \leq x$

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Montrer qu'il existe $c_1 \in]0, 1[$ tel que $f'(c_1) = 1$.
2) Quelle est la définition de dérivée à droite en un point? En déduire la valeur de $f'_d(0)$ puis de $f'(0)$.
3) Montrer qu'il existe $c_2 \in]0, 1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.

Université de Cergy-Pontoise — Jeudi 10 janvier 2008
UFR de Sciences et techniques — M1

Mathématiques

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
1) Donner la définition de dérivabilité en x_0 pour la fonction f.
2) On suppose que f est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 près de x_0.

Exercice 2: Déterminer, si elles existent, les limites des quantités suivantes
1) $A(x) = \dfrac{\sin(2x)}{7x}$, quand x tend vers 0
2) $B(x) = \dfrac{3x^3 + 5x^2}{\sin(3x^2)}$, quand x tend vers 0

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 1$. Préciser le nombre de solutions de cette équation et donner la partie réelle de chaque solution.

Exercice 4: Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 \sin^2(\frac{1}{x})$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
1) Calculer la dérivée de f en tout point de $]0, +\infty[$.
2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Exercice 5: Soient u_n, v_n, w_n les suites définies pour $n \in \mathbb{N}$ par les relations

$$u_0 = 0 \ , \quad \forall n \geq 1, \ u_n = u_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ , \quad \forall n \geq 0, \ v_n = u_{2n} \text{ et } \ w_n = u_{2n+1}$$

A1) Calculer les quantités $(u_3 - u_1)$ et $(u_4 - u_2)$.
A2) Soit $n \geq 0$. Montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$. Que peut-on en déduire sur $v_{n+1} - v_n$? Montrer que la suite v_n est croissante.
A3) Montrer que la suite w_n est décroissante.
A3) Montrer que $w_n - v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que les suites v_n et w_n sont adjacentes. On appelle désormais l leur limite commune.

B) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $[x]$ la partie entière de x. Soit $n \in \mathbb{N}$.
B1) Montrer que $n = 2[\frac{n}{2}]$ ou que $n = 2[\frac{n}{2}] + 1$.
B2) Montrer que $|u_n - l| = |v_{[\frac{n}{2}]} - l|$ ou que $|u_n - l| = |w_{[\frac{n}{2}]} - l|$. En déduire que

$$|u_n - l| \leq |v_{[\frac{n}{2}]} - l| + |w_{[\frac{n}{2}]} - l|$$

B3) On pose $\varphi(n) = [\frac{n}{2}]$. Montrer que $\varphi(n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. φ est-elle strictement croissante?
B4) On admet que les suites $v_{[\frac{n}{2}]}$ et $w_{[\frac{n}{2}]}$ convergent vers l. Montrer que la suite u_n converge vers l.

Université de Cergy-Pontoise
UFR de Sciences et techniques

M1
jeudi 15 janvier 2009

Mathématiques

(Durée : 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 Soit f l'application de $\{1,2,3\}$ dans $\{4,5\}$ définie par $f(1)=4, f(2)=5, f(3)=4$. f est t-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 2 1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Ecrire la négation de la proposition ainsi obtenue.

Exercice 3 Soit $z_0 = -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$. Ecrire z_0 sous forme exponentielle. Résoudre $z^3 = z_0$ (exprimer les solutions sous forme exponentielle).

Exercice 4 Soit u_n la suite définie par $u_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$. Déterminer deux suites extraites de u_n qui convergent vers des limites distinctes. La suite u_n est-elle convergente ?

Exercice 5 Limite éventuelle quand x tend vers 0 de la quantité suivante

$$f(x) = \frac{5x}{\sin(3x)}$$

Exercice 6 1) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(t) = t - \ln(1+t)$. Calculer f' et montrer que

$$\forall t > 0, 0 \leqslant f'(t) \leqslant t$$

Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis pour la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$. Montrer que

$$\forall x > 0, 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant x^2$$

2) Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$. Montrer que

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4} \leqslant \ln(1+\frac{k}{n^2}) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ (on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$).

4) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$. En déduire la limite de $\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$ quand n tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$ converge vers une limite que l'on calculera quand n tend vers $+\infty$.

Université de Cergy-Pontoise — M1

UFR de Sciences et Techniques — jeudi 14 janvier 2010

MATHEMATIQUES

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Exercice 1: Ecrire $z=\sqrt{3}-i$ sous forme exponentielle. Calculer z^6.

Exercice 2: Limite éventuelle des quantité suivantes

$$f(x)=\frac{\sin(2x)}{x} \quad \text{quand} \quad x\longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{3x^3+x^2e^x}{x^3+2x^2e^x} \quad \text{quand} \quad x\longrightarrow +\infty.$$

Exercice 3:

1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

2) Soit f une fonction continue sur $[1,2]$ telle que $f(1)$ et $f(2)$ appartiennent à $[1,2]$. Montrer qu'il existe un point $c\in[1,2]$ tel que $f(c)=c$. On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g définie par $g(t)=f(t)-t$.

Exercice 4: Soit $A\in\mathbb{R}$. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$g(0)=g(2)=A.$$

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\frac{g(x)-A}{x(x-2)}.$$

1) Montrer que $f(x)$ tend vers $\frac{1}{2}g'(2)$ quand x tend vers 2.

2) Montrer que $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}g'(0)$ quand x tend vers 0.

3) En déduire que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et en 2.

4) On suppose que $g'(0)=-g'(2)$. Montrer qu'il existe un point $c\in\,]0,2[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 5: Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $u_n=3\sin(n)+4\cos(n)$.

1) Montrer que la suite u_n est majorée.

2) Montrer que $4\leqslant\sup\{u_n|n\in\mathbb{N}\}\leqslant 5$.